## Aufgabe 1

(6 Punkte)
Der Querschnitt des Rohres ist

$$A = a \cdot b \;\Rightarrow\; b = \frac{A}{a},$$

bei fester Wandstärke ist der Materialverbrauch proportional zum Umfang

$$U = 2(a+b) == 2\left(a + \frac{A}{a}\right) = U(a)$$

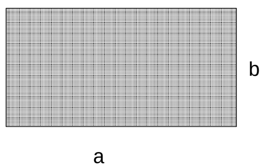


**Abbildung 1:** Rechteck mit Fläche $a \cdot b$ und Umfang $2(a+b)$

Der Umfang kann als Funktion der Seitenlänge $a$ gesehen werden, den minimalen Wert des Umfang findet man durch Ableiten:

$$U'(a) = 2\left(1 - \frac{A}{a^2}\right) = 0$$
$$2a^2 = 2A \;\Rightarrow\; a = \pm\sqrt{A}$$
$$b = \frac{A}{a} = \pm\sqrt{A}$$
$$U''(a) = 2\left(0 - (-2)\frac{A}{a^3}\right)$$
$$U''(\sqrt{A}) = 4\frac{A}{\sqrt{A}^3} = \frac{4}{\sqrt{A}} > 0$$

Es handelt sich also um ein Minimum. Die negative Lösung beschreibt die zweite Möglichkeit der Messung von Längen, die Gegenrichtung.

## Aufgabe 2

(10 Punkte)
Alle gegebenen Funktionen sind ableitbar.

a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2+2}{x^2+2x+1} \\
f'(x) &= \frac{2x(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2)}{(x+1)^4} \\
&= \frac{(x+1)[2x(x+1) - 2(x^2+2)]}{(x+1)\cdot(x+1)^3} \\
&= \frac{2x^2+2x-2x^2-4}{(x+1)^3} \\
&= \frac{2x-4}{(x+1)^3}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 12e^x \\
f'(x) &= 12\cdot(e^x)' = 12e^x
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{12x} \\
f'(x) &= e^{12x}\cdot 12 = 12e^{12x}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{12\cdot\sin(x)} \\
f'(x) &= e^{12\cdot\sin(x)}\cdot 12\cdot\cos(x) = 12\cos(x)\cdot e^{12\cdot\sin(x)}
\end{aligned}
$$

## Aufgabe 3

(10 Punkte)
Zur Näherung wird das MacLaurin-Polynom $T_2(x)$ der Funktion $f(x) = \sqrt{4+x}$ bestimmt. Benötigt werden

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{4+x} = (4+x)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow f(0) = \sqrt{4} = 2 \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(4+x)^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(4+x)^{-\frac{3}{2}} \\
&\Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4\cdot 8} = -\frac{1}{32}
\end{aligned}
$$

Das Polynom lautet ($0!$ ist als eins definiert):

$$T_2(x) = \frac{1}{0!}f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2 = 2 + \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{2}\frac{1}{32}x^2$$

Das Polynom kann als Näherung für die Wurzel benutzt werden, es ist

$$\sqrt{4,2} = f(0,2) \approx T_2(0,2) = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,2 - \frac{1}{64}0,2^2 = 2,049375$$
$$\sqrt{4,4} = f(0,4) \approx T_2(0,4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,4 - \frac{1}{64}0,4^2 = 2,0975$$

## Aufgabe 4

(16 Punkte)
Die benötigten Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2}{x^2+2} \\
f'(x) &= \frac{2x \cdot (x^2+2) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^3+4x-2x^3}{(x^2+2)^2} = \frac{4x}{(x^2+2)^2} \\
f''(x) &= \frac{4(x^2+2)^2 - 4x \cdot 2(x^2+2)2x}{(x^2+2)^4} = \frac{4(x^2+2) - 4x \cdot 4x}{(x^2+2)^3} \\
&= \frac{4x^2+8-16x^2}{(x^2+2)^3} = \frac{8-12x^2}{(x^2+2)^3} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{(-12)2x(x^2+2)^3 - (8-12x^2) \cdot 3(x^2+2)^2 \cdot 2x}{(x^2+2)^6} \\
&= \frac{(-12)2x(x^2+2) - (8-12x^2) \cdot 3 \cdot 2x}{(x^2+2)^4} = \frac{-24x^3-48x-48x+72x^3}{(x^2+2)^4} \\
&= \frac{48x^3-96x}{(x^2+2)^4} = 24x\frac{2x^2-4}{(x^2+2)^4}
\end{aligned}$$

$f(x)$ ist eine Funktion, da jedem Wert aus $\mathbb{R}$ genau ein Wert aus $\mathbb{R}^+$ zugeordnet wird. Bestimmung der Nullstellen:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 0$$
$$x_1 = 0; x_2 = 0 \text{ (doppelte Nullstelle)}$$

Extrema:

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+2)^2} \;\Leftrightarrow\; x_E = 0$$

$$f(0) = 0;\; f''(0) = \frac{8-0}{(0+2)^3} = 1 > 0 \Rightarrow \text{ Minimum bei } (0/0)$$

Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+2} = \frac{x^2}{x^2+2} = f(x)$$

Die Funktion ist spiegelsymmetrisch zur $y$-Achse oder gerade.

Wendestellen und Krümmung:

$$f''(x) = \frac{8-12x^2}{(x^2+2)^3} = 0 \;\Leftrightarrow\; 8-12x^2 = 0$$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$f^{(3)}\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 24\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\frac{2\frac{2}{3}-4}{(\frac{2}{3}+2)^4} \neq 0 \Rightarrow \text{ Wendestellen.}$$

$$f''(x) < 0 \text{ für } x < 1 \Rightarrow \text{ rechtsgekrümmt}$$

Verhalten für große/kleine Variablenwerte:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2} \to \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+2} \to \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

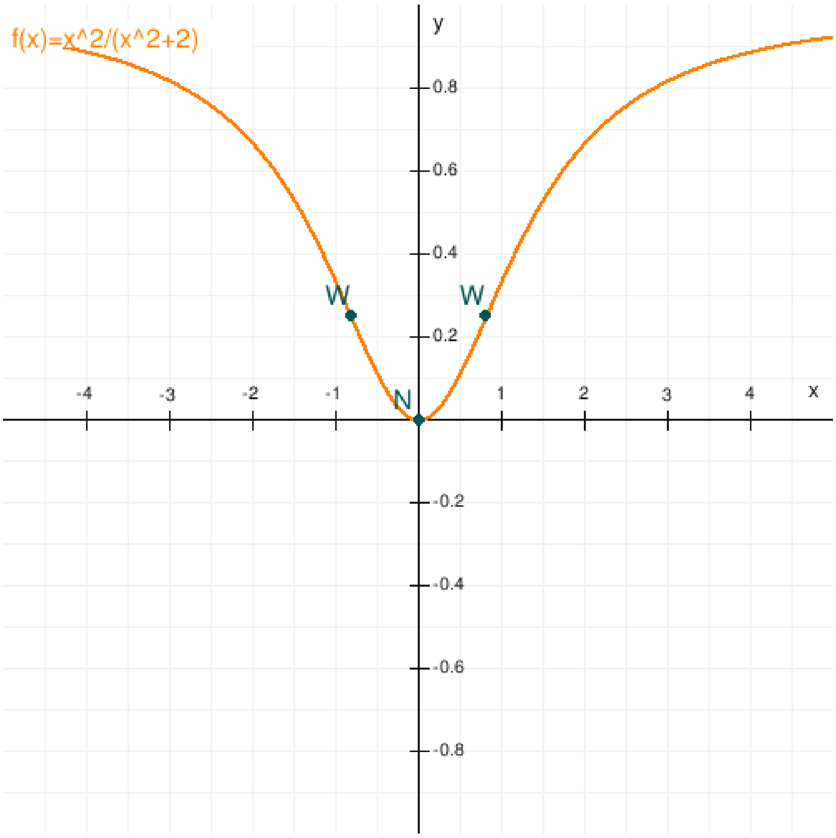


**Abbildung 2:** die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2}$ im Intervall $D$.

## Aufgabe 5

(5 Punkte)

a) Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)'}{(\sin(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\cos(x)} = 0$$

b) Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{=} e^0 = 1$$

## Aufgabe 6

(7 Punkte)

a) $f(x)$ ist für alle $n > 0$ differenzierbar (Polynom, als normale Funktion stetig in ganz $\mathbb{R}$).

b)

$$x' = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{x+h-x} = 1$$

c)

$$\begin{aligned}(x^2)' &= (x \cdot x)' = x \cdot 1 + 1 \cdot x = 2x \\ (x^3)' &= (x^2 \cdot x)' = x^2 \cdot 1 + 2x \cdot x = x^2 + 2x^2 = 3x^2 \\ (x^4)' &= (x^3 \cdot x)' = x^3 \cdot 1 + 3x^2 \cdot x = x^3 + 3x^3 = 4x^3\end{aligned}$$

d) Offensichtlich ist $(x^n)' = nx^{n-1}$. Beweis über vollständige Induktion: Induktionsanfang mit $n = 1$:

$$x' = 1 \cdot x^0 = 1.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot 1 \\ &= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n = n \cdot x^n + x^n \\ &= (n+1)x^n = (n+1)x^{n+1-1}\end{aligned}$$