Musterlösung zur Übungsklausur Mathematik 1 TMM16

M. Oettinger 3.2017

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(8 Punkte):

(a) Betragsfreie Form:

$$r(x) = \sin(|x+1|) = \begin{cases} \sin(x+1) & \text{für} x \geq -1 \\ \sin(-(x-1)) = -\sin(x+1) & \text{für} x < -1 \end{cases}$$

Jedem x-Wert aus D ist eindeutig ein Wert y zugeordnet $\Rightarrow$ es handelt sich um eine Funktion.

Symmetrie: sei $-1 \leq x < 0$, dann ist $r(-x) = sin(-x+1) \neq -r(x)$ und $r(-x) = sin(-x+1) \neq r(x)$. Die Funktion ist nicht symmetrisch.

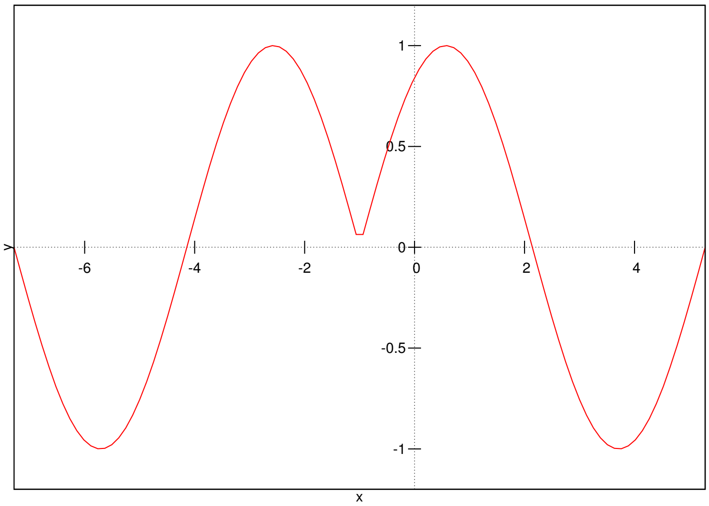
(b) Stetigkeit in $x_0 = -1$:

$$\lim_{x \to -1+} r(x) = \lim_{x \to -1+} \sin(x+1) = 0+$$

$$\lim_{x \to -1-} r(x) = \lim_{x \to -1-} -\sin(x+1) = 0+$$

$\Rightarrow$ die Funktion $r(x)$ ist in $x_0 = -1$ stetig.

(c) Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

(7 Punkte):

i) Induktionsanfang: mit $n_0 = 1$

$$1^1 = \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}1$$

ii) Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} + (n+1) \\
&= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1}{2} = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(4 Punkte):
Es ist offensichtlich

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{k}+1)^2}{k^2+\sqrt{k^4-1}} &\geq \frac{(\sqrt{k})^2}{k^2+\sqrt{k^4}}\\ &= \frac{k}{k^2+k^2} = \frac{1}{2k}.\end{aligned}$$

Weil $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, divergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k}+1)^2}{k^2+\sqrt{k^4-1}}$

Aufgabe 4

(10 Punkte):

$$(1) : f(x) = \sqrt[3]{x}$$

ist für $x \geq 0$ eine Funktion, jedem Variablenwert ist eindeutig ein Funktionswert zugeordnet.

$$(2) : g(x) = \sqrt{x}$$

ist für $x \geq 0$ keine Funktion, jedem Variablenwert $x > 0$ sind zwei Funktionswerte zugeordnet.

$$(3) : h(x) = (|x|)^{\frac{1}{2}}$$

ist für $x \geq 0$ gleich $g(x)$ - keine Funktion.

$$(4) : k(x) = |x|$$

ist für $x \geq 0$ eine Funktion, jedem Variablenwert ist eindeutig ein Funktionswert zugeordnet.

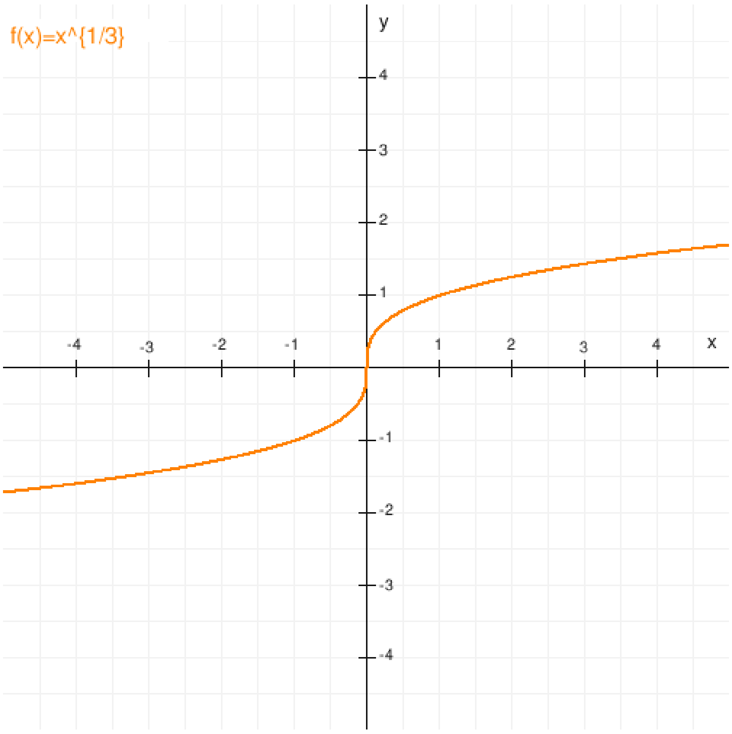


Abbildung 1: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ hat eine Nullstelle bei $x_0 = 0$

Aufgabe 5

(7 Punkte):

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(\sqrt{x}+1)\cdot x} = \frac{\lim_{x\to 1} x+1}{\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)\cdot \lim_{x\to 1} x} = \frac{2}{2} = 1$$

b)

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad > 0 \\ -1 & \text{für} \quad < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} f(x) = 1, \lim_{x\to 0-} f(x) = -1$$

$\Rightarrow$ der Grenzwert existiert nicht.

c) mit der Reihendarstellung des Sinus:

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = x\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \dots\right)$$

folgt sofort

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x\left(1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+\dots\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+\dots\right) = 1$$

Aufgabe 6

Rechnen Sie die folgende komplexe Zahl in ihre algebraische Normalform ($z = a + ib$) um:

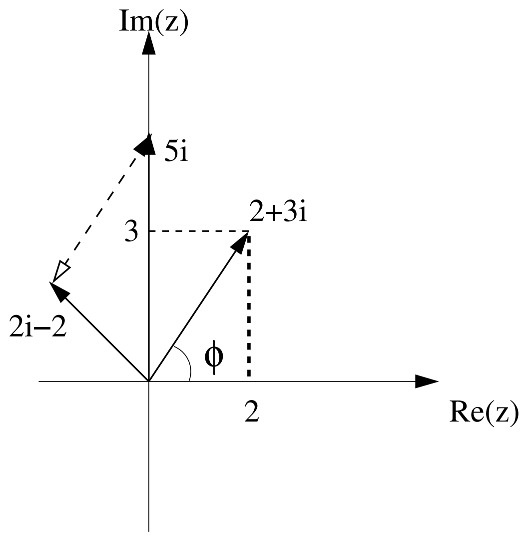
$$z_1 = 5\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Mit der trigonometrischen Darstellung

$$r\cdot e^{i\varphi} = r\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)$$
$$5\cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 5\left(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})\right) = 5(0+i) = 5i$$

Berechnen Sie die Differenz von z_1 und $z_2 = 2 + i\cdot 3$ und stellen Sie z_1, z_2 und $z_1 - z_2$ als Vektoren in der Gaußschen Zahlenebene dar:

$$z_1 - z_2 = 5i - (2+3i) = 2i - 2$$



Aufgabe 7

(8 Punkte)

a)

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2-1}+x&=0\\ \sqrt{2x^2-1}&=-x\\ 2x^2-1&=x^2\\ &\Rightarrow x_{1/2}=\pm 1\end{aligned}$$

b)

$$\sqrt{\frac{4-x}{x+1}}\in\mathbb{R}, \text{ wenn } \frac{4-x}{x+1}>0$$

$$4-x>0\Rightarrow x<4$$

$$x+1>0\Rightarrow x>-1$$

Die Werte der Wurzel sind reell für $-1<x<4$.