Musterlösung zur Klausur Mathematik 1 (TMM14)

M. Oettinger 26.03.2015

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(9 Punkte):

(a) Betragsfreie Form:

$$r(x) = \frac{1}{|2x-1|} = \begin{cases} \frac{1}{1-2x} & \text{für} x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2x-1} & \text{für} x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Es handelt sich um eine Funktion - jedem Wert x aus D ist genau ein Wert y zugeordnet.

Symmetrie: sei $x \leq 2$, dann ist

$$r(-x) = \frac{1}{2(-x)-1} = -\frac{1}{2x+1} \neq -r(x) = -\frac{1}{2x-1}$$

$$r(-x) = \frac{1}{2(-x)-1} = -\frac{1}{2x+1} \neq r(x) = \frac{1}{2x-1}$$

$r(x)$ ist nicht symmetrisch.

(b) Grenzwert der Folge: Vermutung $a = 0$:

$$\left|\frac{1}{2n-1} - 0\right| = \frac{1}{|2n-1|} < \varepsilon$$

$$2n > \frac{1}{\varepsilon} + 1$$

$$n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)$$

Die Folge besitzt den Grenzwert Null.

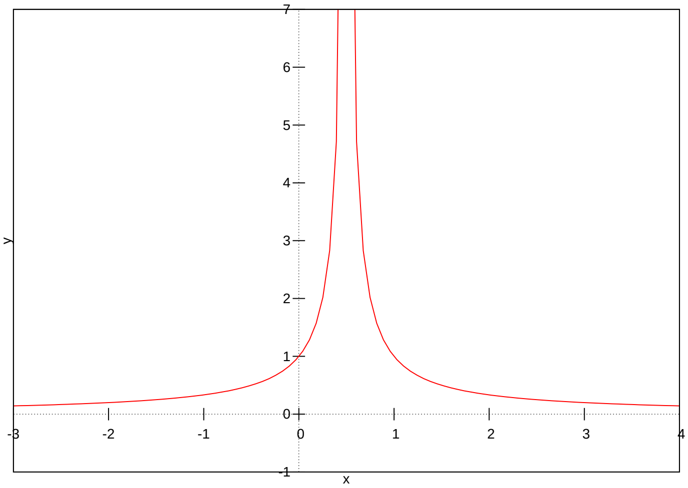
(c) Verhalten für $x \to \pm\infty$: der Grenzwert der zugehörigen Folge ist Null

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{|2x-1|} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x-1} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} r(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{|2x-1|} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x-1} = 0,$$

denn $r(x)$ ist ein Polynom, der Grad des Nenners ist größer als der Grad des Zählers.

(d) Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

(9 Punkte)
Lösungen der Gleichungen

a) $x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} = 0$, die erste Lösung $x_1 = 1$ lässt sich einfach erraten.

Durch Polynomdivision durch den Faktor $(x-1)$:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 \quad - x + \tfrac{1}{2}\big) : \big(x-1\big) = x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} \\
\underline{- x^3 \quad + x^2} \\
\qquad\quad \tfrac{1}{2}x^2 \quad - x \\
\qquad \underline{- \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x} \\
\qquad\qquad\quad - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} \\
\qquad\qquad\quad \underline{\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

die weiteren Lösungen z. B. mit der $p-q-$Form

$$
\begin{aligned}
x_{2/3} &= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} \\
&= -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \\
&\Rightarrow x_2 = -1 \quad x_3 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

b)

$$\prod_{i=1}^{4} i + \sum_{k=0}^{4} k + \sum_{l=1}^{3} 2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3 \cdot 2 = 24 + 10 + 6 = 40$$

c)

$$4! + \sum_{k=1}^{4} k^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 24 + 1 + 4 + 9 + 16 = 54$$

Aufgabe 3

(6 Punkte) Oma Nym bietet nach n Besuchen die Summe von

$$S_1 = 20 + \sum_{i=1}^{n} 10 = 20 + n \cdot 10,$$

für Arnos Version ergibt sich (mit der Gauß-Summe)

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} 0,5 \cdot i = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Arno gewinnt, wenn seine Summe größer ist, also

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &> 20 + n \cdot 10 \\ n^2 + n &> 80 + 40n \\ n^2 - 39n - 80 &> 0\end{aligned}$$

Die Lösungen der quadrat. Gleichung lauten $n_1 = -1,95$ und $n_2 = 40,95$, Arno gewinnt also nach insgesamt 41 Besuchen (die negative Lösung kann verworfen werden, weil die Summen nur positive Indizes liefern).

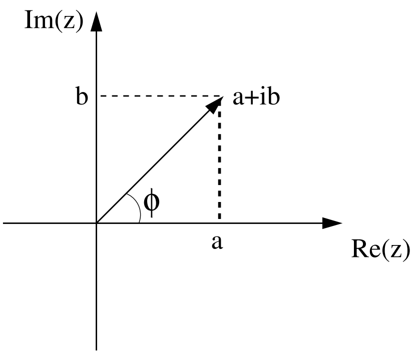
Aufgabe 4

(6 Punkte):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} (\sin(x))^{2x} &= \lim_{x\to 0+} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right)^{2x} \\ &= \lim_{x\to 0+} \underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \cdot \underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...\right)^{2x}}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \\ &\Longrightarrow \lim_{x\to 0+} (\sin(x))^{2x} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

Aufgabe 5

(14 Punkte)



a)

b) Kartesische Darstellung: mit $a = r\cos(\varphi), b = r\sin(\varphi)$ und $z_1 = a + ib$ folgt unter Ausnutzen von $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$z_1 = a + ib = 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 + i \cdot 2$$

c) der Betrag $|z|$ ist natürlich $r = 2\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_1} = 2 - i \cdot 2$.

d)

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (2+2i)(1+2i) = 2 + 4i + 2i + 4i^2 \\
&= 2 + 6i - 4 = -2 + 6i \\
\frac{z_2}{z_1} &= \frac{z_2 \cdot \overline{z_1}}{z_1 \cdot \overline{z_1}} = \frac{1}{|\overline{z_1}|^2} \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} = \frac{(1+2i)(2-2i)}{(2\sqrt{2})^2} \\
&= \frac{6+2i}{8} = \frac{1}{4}(3+i)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

(6 Punkte): Vollständige Induktion:

i) Der Induktionsanfang mit $n_0 = 1$ gilt wegen

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 - 1 = 1^2.$$

ii) Beim Induktionsschritt ist zu zeigen: Wenn

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \text{ , dann gilt } \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

Wir führen den Induktionsschritt aus:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) \\
&\overset{\text{n. Vorr.}}{=} n^2 + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 2 - 1 \\
&= (n+1)^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

(5 Punkte):

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x & x < 2 \\ a^2(x+2) & x \geq 2 \end{cases}$$

Die Funktion ist stetig in $x = 2$, wenn

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} a^2(x+2) = 4a^2 = \lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} 8a + 16x = 8a + 32$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 = 8a + 32 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 8 = 0$$

Die beiden Lösungen sind $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$