Aufgabe 1

(8 Punkte)
Die Funktion $P(x)$ beschreibt den Wert des Produkts aus Vorgänger und Nachfolger der Zahl x:

$$P(x) = (x-1)\cdot(x+1) = x^2 - 1$$
$$P'(x) = 2x$$
$$P''(x) = 2$$

Zur Bestimmung des Minumums wird die erste Ableitung Null gesetzt:

$$2x = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$
$$P''(x_0) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

Die Form der Kurve lässt sich dem Ausdruck $P(x) = x^2 - 1$ direkt entnehmen - es handelt sich um eine um den Betrag 1 nach unten verschobene Normalparabel, die nur für $x \in \mathbb{Z}$ definiert ist.

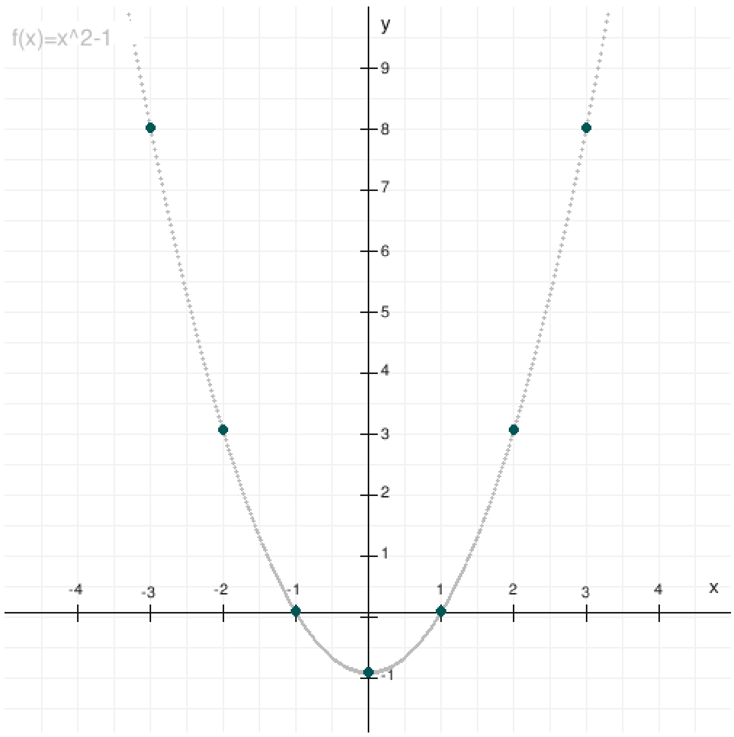

Abbildung 1: Die Funktion $P(x) = (x-1)(x+1)$. Das Minimum liegt bei x_0 = 0.

Aufgabe 2

(7 Punkte)
Alle gegebenen Funktionen sind ableitbar.

a) differenzierbar, weil Quotient von Polynomen ohne Nullstelle im Nenner

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-4}{2x^2+1}; \qquad x \in \mathbb{R} \\ f'(x) &= \frac{2x(2x^2+1)-(x^2-4)4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{4x^3+2x-4x^3+16x}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{18x}{(2x^2+1)^2} \end{aligned}$$

b) differenzierbar, Verkettung differenzierbarer Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\cos(x^2+3) \\ f'(x) &= 3(-\sin(x^2+3)) \cdot 2x = -6x\sin(x^2+3) \end{aligned}$$

c) differenzierbar, Verkettung differenzierbarer Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{12\cdot\sin(x)} \\ f'(x) &= e^{12\cdot\sin(x)} \cdot 12 \cdot \cos(x) = 12\cos(x) \cdot e^{12\cdot\sin(x)} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Nullsetzen der ersten Ableitung liefert

$$f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}x,$$

einsetzen der Stelle $x = 2$:

$$a = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

Setzt man die Werte für x und a in die zweite Ableitung ein, so ergibt sich

$$f''(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2x + 2a = -3x + 2a = -6 + 2\frac{3}{2} = -3 < 0,$$

es handelt sich also um ein Maximum.

b) Die Steigung ergibt sich aus der ersten Ableitung

$$\begin{aligned}
f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax &= \frac{4}{3} \\
\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{4}{3} &= 0 \\
\Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}3x + \frac{2}{3}\frac{4}{3} &= 0 \\
x_{1/2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{2} - \frac{8}{9}} = 1 \pm \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Die Tangentengleichungen in den Stellen $x_{1/2}$ an die Kurve ergeben sich nach

$$\begin{aligned}
t_{1/2}(x) &= f(x_{1/2}) + f'(x_{1/2}) \cdot (x - x_{1/2}) : \\
t_1(x) &= f(\frac{4}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) = 8,52 + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) \\
t_2(x) &= f(\frac{2}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3}) = 2,81 + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3})
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(16 Punkte)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot \frac{x^2 - 4}{2} = \frac{x^3 - 4x}{2} \\
f'(x) &= \frac{3x^2 - 4}{2} \\
f''(x) &= \frac{6x}{2} = 3x \\
f^{(3)}(x) &= 3
\end{aligned}$$

Es handelt sich um eine eindeutige Zuordnung - es ist eine Funktion.

Symmetrie der Funktion:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 4(-x)}{2} = -\frac{x^3 - 4x}{2} = -f(x),$$

die Funktion ist ungerade (punksymmetrisch zum Ursprung). Sie hat keine Lücken oder Pole, der Definitionsbereich und der Wertebereich ist ganz $\mathbb{R}$.

Verhalten für große und kleine Variablenwerte:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x\to\pm\infty} x^3 - 4x = \pm\infty.$$

Nullstellen: $f(x)$ wird Null, wenn der Zähler Null wird,

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0$$
$$x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow x_{2/3} = \pm 2$$

Extrema: Nullsetzen der ersten Ableitung liefert

$$3x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{4/5} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$f(\frac{2}{\sqrt{3}}) = -\frac{8}{3\sqrt{3}}$$
$$f(-\frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$
$$f''(\frac{2}{\sqrt{3}}) = 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} > 0$$
$$f''(-\frac{2}{\sqrt{3}}) = 3 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -2\sqrt{3} < 0$$

Die Funktion hat ein Maximum bei $(-\frac{2}{\sqrt{3}}/\frac{8}{3\sqrt{3}})$ und ein Minimum bei $(\frac{2}{\sqrt{3}}/-\frac{8}{3\sqrt{3}})$.

Wendestellen und Krümmung: Nullsetzen der zweiten Ableitung

$$f''(x) = \frac{6x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_6 = 0$$
$$f^{(3)}(0) = 3 > 0$$

Die Funktion hat eine Wendestelle bei $(0/0)$, unterhalb der Wendestelle (z.B. bei $x = -1$) ist

$$f''(-1) = 3(-1) < 0,$$

sie ist also rechtsgekrümmt und ändert ihr Krümmungsverhalten an der Wendestelle (linksgekrümmt für $x > 0$).

Stetigkeit: bei der Funktion handelt es sich um ein Polynom

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{2} = \frac{1}{2} \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 0,$$

Polynome sind als normale Funktionen immer stetig.

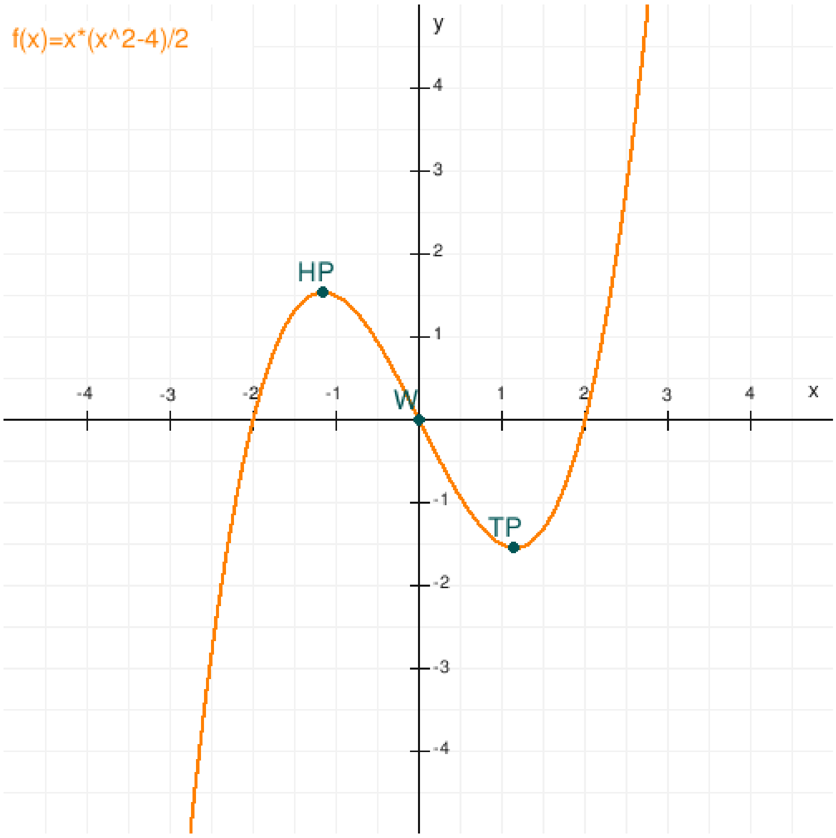

Abbildung 2: Skizze der Funktion $f(x)$

Aufgabe 5

(5 Punkte)

a) Mit $e^0 = 1$ folgt

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e^x} = \frac{0}{1} = 0$$

b) Der Grenzwert ist von der Form $0 \cdot (-\infty)$ und kann einfach umgeschrieben werden. Mit der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0$$

Aufgabe 6

(7 Punkte)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 = 3x^2
\end{aligned}$$