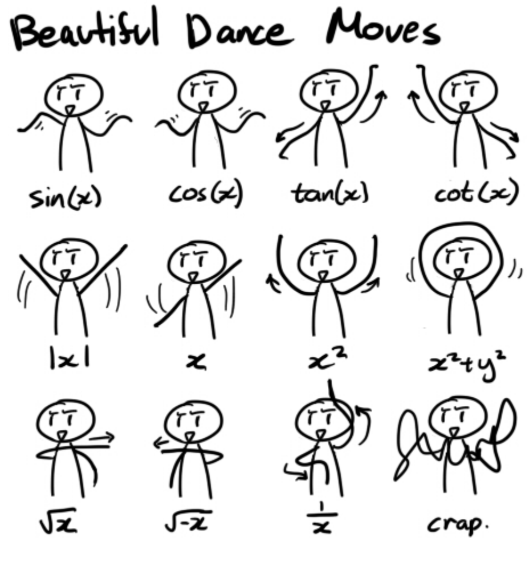
Übungsklausur Mathematik I

TMM17

Zeit: 90Min.
Insgesamt erreichbare Punktzahl: 53, 100%: 50 Punkte.



Aufgabe 1

Gegeben sind zwei Relationen

$$r_1(x) = e^{|x|}, \quad r_2(x) = e^{|-x|}$$

mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

a) Handelt es sich um Funktionen (wenn ja, warum)?

b) Schreiben Sie $r_1(x)$ und $r_2(x)$ in betragsfreier Form und untersuchen Sie auf Symmetrie. Handelt es sich um gerade oder ungerade Funktionen oder Relationen?

c) Untersuchen Sie die beiden Relationen an der Stelle $x_0 = 0$ auf Stetigkeit

d) Untersuchen Sie das Verhalten der Relationen für große und kleine Variablenwerte.

e) Skizzieren Sie $r_1(x)$ und $r_2(x)$ im Intervall $I = [\pi; \pi]$.

Aufgabe 2

(10 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklungen den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x(1 - \cos(x))}$$

Aufgabe 3

(6 Punkte) Arno Nym verhandelt mit seiner Oma Mira Nym (geborene Bellenbaum) über sein Taschengeld. Oma Mira bietet eine Einmalzahlung von 20,- und die Zahlung von 10,- bei jedem weiteren Besuch. Arno hätte gern sofort 0,50, beim nächsten Besuch 1,- gefolgt von 1,50 beim übernächsten Besuch, also bei jedem Besuch eine Steigerung um -,50.

Wieviele Besuche der Oma müssen vergehen, bis Arno gegenüber der Version seiner Oma gewinnt?

Aufgabe 4

Alfred B. Trüger versucht seinem Kommilitonen Stu Dent zu beweisen, dass $2 \cdot 2 = 5$ ist:

$$20 = 20 \tag{1}$$
$$-20 = -20 \tag{2}$$
$$0 - 20 = 0 - 20 \tag{3}$$
$$16 - 16 - 20 = 25 - 25 - 20 \tag{4}$$
$$16 - 36 = 25 - 45 \tag{5}$$
$$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4} \tag{6}$$
$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \tag{7}$$
$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} \tag{8}$$
$$2 \cdot 2 = 5 \tag{9}$$

Stu glaubt das nicht (er hat recht!). Wo liegt der erste Fehler im obigen "Beweis"?

Aufgabe 5

(9 Punkte) Eine komplexe Zahl z wird in der Gaußschen Zahlenebene durch den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und die Länge $r = 2\sqrt{2}$ dargestellt
$(\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}})$.

a) Skizzieren Sie die Zahl in der Gauß-Ebene

b) Stellen Sie die Zahl in der kartesischen Form als $z = a + i \cdot b$ dar

c) Wie lautet der Betrag $|z|$ und die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ zu z?

Aufgabe 6

(7 Punkte)
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

für alle $n \in \mathbb{N}; n > 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 7

(7 Punkte) Das Symbol $0,\bar{9}$ (Periode) kann mit Hilfe einer Reihendarstellung als

$$0,\bar{9} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 0,999999999...$$

definiert werden. Zeigen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe, dass die Beziehung ($\equiv$: identisch)

$$0,\bar{9} \equiv 1$$

gilt.