Musterlösung zur Übungsklausur Mathematik 1 TMM17

M. Oettinger 3.2018

Zeit: 90Min.

Aufgabe 1

$$r_1(x) = e^{|x|}, \quad r_2(x) = e^{|-x|}$$

a) Es handelt sich um Funktionen, jedem Wert $x \in \mathbb{R}$ ist eindeutig ein Funktionswert $y = e^{|x|}$ zugeordnet. Dabei gilt natürlich $r_1(x) = r_2(x)$.

b) Betragsfreie Form:

$$r_1(x) = r_2(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Es gilt

$$r_1(-x) = e^{-(-x)} = e^x = r_1(x),$$

also handelt es sich um eine gerade Funktion (spiegelsymmetrisch zur y-Achse).

c) Stetigkeit:

$$\lim_{x \to 0-} r_1(x) = \lim_{x \to 0-} e^{-x} = \lim_{x \to 0+} e^x = \lim_{x \to 0+} r_1(x)$$

Die Funktion $r_1(x)$ ist also stetig in $x_0 = 0$.

d) Verhalten für große/kleine Werte:

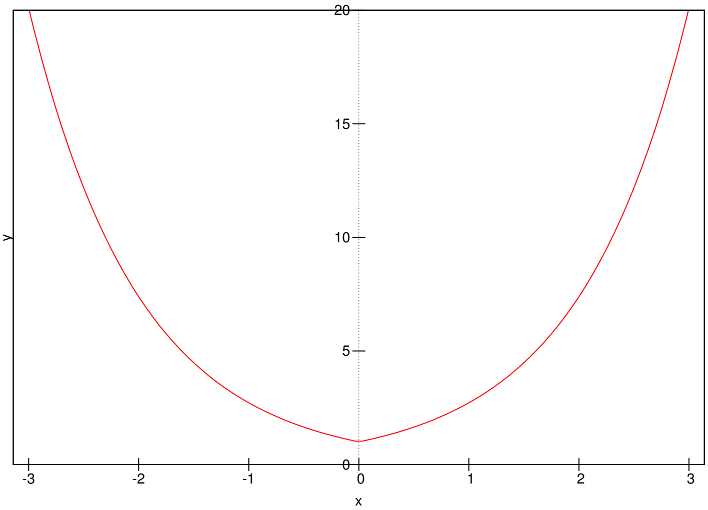
$$lim_{x \to \infty} e^x = lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty,$$

denn für $Q > 1$ und alle a gilt:

$$lim_{x \to \infty} \frac{Q^x}{x} = \infty$$

'Q^x wächst schneller als jede Potenz von x'.

e)



Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x(1-\cos(x))} &= \lim_{x\to 0}\frac{-x+x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots}{x-x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots}{-x\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots}{-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\dots} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}\cdot\frac{-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\dots}{-\frac{1}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\dots} \\
&= \frac{-\frac{1}{3!}}{-\frac{1}{2!}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Oma Nym bietet nach n Besuchen die Summe von

$$S_1 = 20+\sum_{i=1}^{n} 10 = 20+n\cdot 10,$$

für Arnos Version ergibt sich (mit der Gauß-Summe)

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} 0,5\cdot i = \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

Arno gewinnt, wenn seine Summe größer ist, also

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &> 20 + n \cdot 10 \\ n^2 + n &> 80 + 40n \\ n^2 - 39n - 80 &> 0\end{aligned}$$

Die Lösungen der quadrat. Gleichung lauten $n_1 = -1,95$ und $n_2 = 40,95$, Arno gewinnt also nach insgesamt 41 Besuchen (die negative Lösung kann verworfen werden, weil die Summen nur positive Indizes liefern).

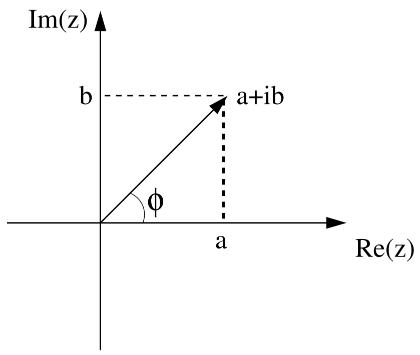
Aufgabe 4

Der Fehler liegt beim Übergang von Zeile (7) nach (8), denn

$$4 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2} \neq 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$

Die Funktion $x \longmapsto x^2$ ist nicht bijektiv (eineindeutig) und damit nicht umkehrbar - deshalb hat die Wurzel eine positive und eine negative Lösung. Aus der Aussage $(-a)^2 = a^2$ folgt eben nicht, dass $a = -a$ (falls $a \neq 0$).

Aufgabe 5

a) 

b) Kartesische Darstellung: mit $a = r\cos(\varphi), b = r\sin(\varphi)$ und $z = a + ib$ folgt unter Ausnutzen von $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$z = a + ib = 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 + i \cdot 2$$

c) der Betrag $|z|$ ist natürlich $r = 2\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z} = 2 - i \cdot 2$

Aufgabe 6

i) Induktionsanfang: mit $n_0 = 1$

$$1^1 = \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}1$$

ii) Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} +(n+1) \\
&= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1}{2} = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1)
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

$$\begin{aligned}
0,\bar{9} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \\
&= 9\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} - 1\right) \text{ zusätzlicher Summand wg. } k = 0,
\end{aligned}$$

bei der Summe handelt es sich um die geometrischen Reihe, die gegen den Wert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ konvergiert, da } |q| < 1.$$

$$\Rightarrow 0,\bar{9} = 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 9\left(\frac{1}{\frac{9}{10}} - 1\right) \qquad = 9\left(\frac{10}{9} - \frac{9}{9}\right) = \frac{9}{9} = 1.$$