Musterlösung zur Klausur Mathematik 1 (TMM17)

M. Oettinger 03.2018

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(10 Punkte):

a) es ist natürlich eine Funktion - jedem Wert x ist eindeutig ein Wert y zugeordnet.

b) Nullstellen

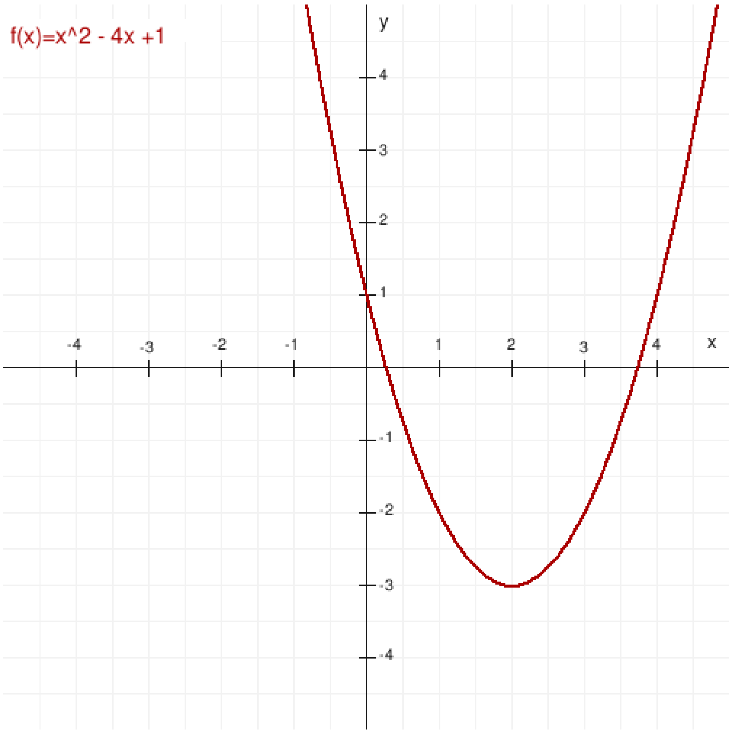
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 1 = x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 1 \\ &= x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 3 = (x-2)^2 - 3 = 0 \\ (x-2)^2 &= 3 \\ x - 2 &= \pm\sqrt{3} \\ x &= 2 \pm \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2 - \sqrt{3}, \;\; x_2 = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

c) Symmetrie

$$\begin{aligned} f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 1 = x^2 + 4x + 1 &\neq f(x) \\ \text{und } &\neq -f(x) \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x)$ ist nicht symmetrisch. Sie ist aber stetig (alle Polynome sind stetig).

d) Funktionsgraph: es handelt sich um eine Normalparabel mit Scheitel bei (2/-3).



Aufgabe 2

(11 Punkte):

a)

$$\lim_{x\to 0+}(\sin(x))^{2x} = \lim_{x\to 0+}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right)^{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \cdot \underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...\right)^{2x}}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0+}(\sin(x))^{2x} = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

b)

$$z = \sin(i) = i - \frac{i^3}{3!} + \frac{i^5}{5!} - \frac{i^7}{7!} + ...$$

$$= i\left(1 + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^7}{7!} + ...\right) \quad = i\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\cdot 1^{2k+1} = i\cdot\sinh(1) \approx i\cdot 1,175$$

$$\Re(z) = 0\ ;\ \Im(z) = \sinh(1) \approx 1,175$$

Aufgabe 3

(10 Punkte)
Lösungen der Gleichungen

a) $x(x^2-7)=-6 \quad \Rightarrow \quad x^3-7x+6=0$, die erste Lösung $x_1=1$ lässt sich einfach erraten. Durch Polynomdivision durch den Faktor $(x-1)$:

$$\begin{array}{l}
\big(\;\; x^3 \qquad -7x+6\big) : \big(x-1\big) = x^2+x-6 \\
\underline{-x^3+x^2} \\
\qquad x^2-7x \\
\quad \underline{-x^2 \;\; +x} \\
\qquad\quad -6x+6 \\
\qquad\quad \underline{\;\;\, 6x-6} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

die weiteren Lösungen z. B. mit der $p-q-$Form

$$\begin{aligned}
x_{2/3} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\
&= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}. \\
&\Rightarrow x_2 = -3 \quad x_3 = 2
\end{aligned}$$

b)

$$3x^3-24x^2+20x+3=2-(25x-1)$$

$$\Leftrightarrow 3x^3-24x^2+45x=0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x^2-8x+15)=0 \Rightarrow x_1=0.$$

$$x^2-8x+15=0, \text{ Lösung mit } p,q\text{-Formel:}$$

$$x_{2/3}=4\pm\sqrt{16-15}=4\pm 1$$

$$x_2=3, x_3=5$$

c)

$$\begin{aligned}
x^3+8x^2+16x &= x(x^2+8x+16)=0 \\
x_1 &= 0 \\
x^2+8x+16 &= (x+4)^2=0 \\
x_{2/3} &= -4
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(6 Punkte): Beweis mittels vollständiger Induktion:
Induktionsanfang mit $n_0 = 1$:

$$n_0^2 + n_0 = 1 + 1 = 2, \text{ gerade.}$$

Induktionsschritt:
die Voraussetzung ist

$$n^2 + n \text{ ist gerade.}$$

$$\begin{aligned}(n+1)^2 + n + 1 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 &= (n^2 + n) + 2n + 2 \\ &= (n^2 + n) + 2(n+1)\end{aligned}$$

Der erste geklammerte Ausdruck ist nach Voraussetzung gerade, der zweite ist ein ganzzahliges Vielfaches von 2 und daher gerade (denn $n + 1 \in \mathbb{N}$).

Aufgabe 5

(6 Punkte)

a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{3!-1}\sum_{n=-2}^{2}\frac{n^2k}{p} &= \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1-1}\left(\frac{(-2)^2k}{p} + \frac{(-1)^2k}{p} + \frac{0^2k}{p} + \frac{(1)^2k}{p} + \frac{(2)^2k}{p}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{(4+1+1+4)k}{p}\right) = \frac{10k}{5p} = 2\frac{k}{p}\end{aligned}$$

b)

$$3\cdot 3! - \sum_{k=1}^{3}\prod_{l=1}^{3} l = 3\cdot 3\cdot 2\cdot 1 - \sum_{k=1}^{3} 1\cdot 2\cdot 3 = 3\cdot 3\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 0$$

Aufgabe 6

(5 Punkte)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k(k^2+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$$

weil $k^2+1 > k^2$ ist $\frac{k}{k^3+k} = \frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2)}$ konvergiert und ist Majorante

$\Rightarrow \frac{1}{(k^2+1)}$ konvergiert.

Aufgabe 7

(5 Punkte):

$$f(x) = \begin{cases} 14x - 7c & x < 3 \\ c^2(x-3) & x \geq 3 \end{cases}$$

Die Funktion ist stetig in $x = 3$, wenn

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} c^2(x-3) = 0 = \lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} 14x - 7c = 42 - 7c$$

$$\Leftrightarrow 42 = 7c \Leftrightarrow c = 6$$