Musterlösung zur Klausur Mathematik 3 TMM18

M. Oettinger 19.12.2019

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 54, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

Integrale (11 Punkte):

(a) partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 e^x dx &= \left[x^2 e^x\right]_0^2 - \int_0^2 2xe^x dx \\ &= 4e^2 - \left(\left[2xe^x\right]_0^2 - \int_0^2 2e^x dx\right) \\ &= 4e^2 - 4e^2 + \left[2e^x\right]_0^2 = 2e^2 - 2 = 2\left(e^2-1\right)\end{aligned}$$

(b) Partialbruchzerlegung: $x^2 - 2x = x(x-2)$, also ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-2x} &= \frac{1}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} \\ &= \frac{A(x-2)+Bx}{x^2-2x} \\ &\Rightarrow Ax - 2A + Bx = 1 \\ &\Rightarrow A + B = 0; \quad -2A = 1 \\ &\Rightarrow A = -\frac{1}{2}; \quad B = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x} dx = \int \frac{1/2}{x-2} - \frac{1/2}{x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln|x-2| - \ln|x|) + C$$

(c) Nutzt man aus, dass $\sin(-x) = -\sin(x)$:

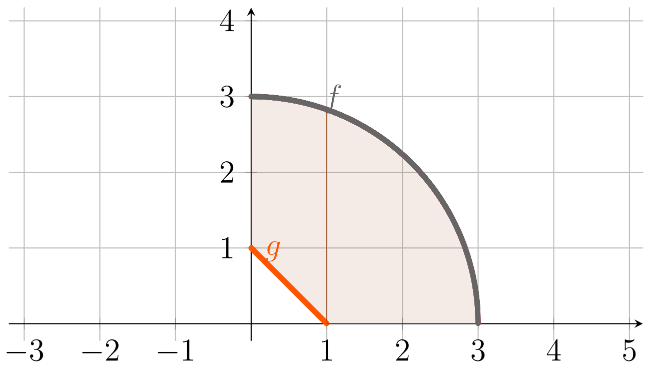
$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x))^2 + (\sin(-x))^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx$$

und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, so folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = [x]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

Aufgabe 2

(8 Punkte)
Doppelintegral des Viertelkreises (in Polarkoordinaten, weil es sich um einen Bereich mit Rotationssymmetrie handelt):



$$A_\circ = \iint\limits_{(A_\circ)} dA; \quad y \geq 0;\ x \geq 0;\ 0 \leq x^2 + y^2 < 9.$$

$$\iint\limits_{(A_\circ)} dA = \int\limits_{r=0}^{3} \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} r dr d\varphi = \int\limits_{r=0}^{3} \frac{\pi}{2} r dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^3 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{9}{2}$$

Die Fläche unter $g(x)$ kann ebenfalls über ein Doppelintegral berechnet werden (hier sind kartesische Koordinaten praktischer:

$$A_\Delta = \iint\limits_{(A_\Delta)} dA$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{-x+1} dx dy = \int_0^1 [y]_0^{-x+1} dx = \int_0^1 -x + 1 dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Einfacher ist die geometrische Begründung: das Dreieck unter $g(x)$ hat die halbe Fläche des Quadrats mit Seitenlänge 1.

Die gesuchte Fläche ist

$$A_\circ - A_\Delta = \frac{9\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{9\pi - 2}{4}$$

Aufgabe 3

(9 Punkte)
Es handelt sich um eine lineare, inhomogene DGL 1.Ordnung, die zugehörige homogene DGL ist

$$\begin{aligned} y_0' + \frac{y_0}{x} &= 0 \\ y_0 &= C \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} = C \cdot x \end{aligned}$$

Weg 1: Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung: der Ansatz ist der verallgemeinerte Störterm

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_0 x \cos(x) + c_1 x \sin(x) \\ y_p'(x) &= c_0 \cos(x) - c_0 x \sin(x) + c_1 \sin(x) + c_1 x \cos(x) \end{aligned}$$

in die DGL eingesetzt:

$$\begin{aligned} c_0 \cos(x) - c_0 x \sin(x) + c_1 \sin(x) + c_1 x \cos(x) - \frac{1}{x}(c_0 x \cos(x) + c_1 x \sin(x)) &= x \cos(x) \\ c_1 x \cos(x) - c_0 x \sin(x) &= x \cos(x) \\ \Rightarrow c_0 = 0; \quad c_1 &= 1 \\ \Rightarrow y_p(x) &= x \sin(x) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist die Summe

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = C \cdot x + x \sin(x)$$

Weg 2: Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten: Ansatz ist

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x) \cdot x \\ y'(x) &= C'(x) \cdot x + C(x). \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$\begin{aligned} y' - \frac{y}{x} &= C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{1}{x} C(x)x = x\cos(x) \\ C'(x) \cdot x &= x\cos(x) \\ C(x) &= \int \cos(x) dx = \sin(x) + C \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also

$$y(x) = C(x)x = x(\sin(x) + C)$$

Die Lösung des Anfangswertproblems $y(\pi/2) = \pi$:

$$y(\pi/2) = \pi/2(\sin(\pi/2) + C) = \pi \qquad \Rightarrow \qquad C = 1$$

$$y(x) = x(\sin(x) + 1)$$

Aufgabe 4

Differentialgleichungen (6 Punkte):

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \tag{1}$$

$$y^{(3)} + yx^3 = 4y \tag{2}$$

$$F(y'', y', \sin(y)) = 0 \tag{3}$$

Gleichung	(1)	(2)	3
linear	-	X	-
nicht-linear	X	-	X
homogen	-	X	X
inhomogen	X	-	-
Ordnung	1	3	2

Wieviele Lösungen haben die Differentialgleichungen? Unendlich viele, jede besitzt mindestens einen freien Parameter.

Aufgabe 5

Bestimmung der Fourier-Koeffizienten für die 2π-periodische Sägezahnfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) \text{ für } 0 \leq x < 2\pi$$

mit periodischer Fortsetzung (11 Punkte):
Die Funktion ist ungerade ($f(-x) = -f(x)$), die Berechnung der b_n genügt.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi}{2}\sin(nx)dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\cdot\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}0 - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\cdot\sin(nx)dx = -\frac{1}{2\pi}\left(\left[x\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)\right]_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} -\frac{1}{n}\cos(nx)dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n}\left[x\cdot\cos(nx)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi n}(2\pi\cos(2\pi n) - 0) = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe lautet also

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(nx)$$

Aufgabe 6

(9 Punkte)

a) Es handelt sich um eine separable DGL (von der Form $\dot{f}(t) = g(x)\cdot h(f)$):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(t) &= -\lambda f(t) \\
\frac{df(t)}{f(t)} &= -\lambda dt \\
\ln(|f(t)|) &= -\lambda t + \ln(|C|) \\
f(t) &= C\cdot e^{-\lambda t} \\
f(0) &= f_0 \quad \Rightarrow f(t) = f_0\cdot e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

b) Mit der Laplace-Transformierten der Funktion

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),$$

der 1. Ableitung

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

und der Randbedingung $f(0) = f_0$ lässt sich die DGL wie folgt transformieren:

$$\begin{aligned} sF(s) - f_0 + \lambda F(s) = 0 \\ \Rightarrow F(s) &= \frac{f_0}{s+\lambda} \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+\lambda}\} = f_0 \cdot e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$