# Musterlösung zur Übungsklausur
# Mathematik III
# TMM18

12.2019

**Aufgabe 1**

(a) Mit dem Additionstheorem $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$\int_{-2}^{2} e^x(\cos^2(x) + \sin^2(x))dx = \int_{-2}^{2} e^x \cdot 1dx = [e^x]_{-2}^{2} = e^2 - e^{-2}.$$

(b) Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}\frac{4}{x^2-4} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4} \\ &\Rightarrow\ (A+B)\cdot x = 0\ \Rightarrow\ A = -B \\ &\Rightarrow\ 2A - 2B = 4A = 4\ \Rightarrow\ A = 1\ ;\ B = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{x^2-4}dx &= \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x+2}dx \\ &= \ln|x-2| - \ln|x+2| + C\end{aligned}$$

(c) Substitution: $u(x) = \cos(x)$:

$$\frac{du}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow dx = -\frac{du}{\sin(x)}$$

$$\begin{aligned}\int \sin(x)e^{-\cos(x)}dx &= \int \sin(x)e^{-u}\left(-\frac{du}{\sin(x)}\right) = -\int e^{-u}du \\ &= -\left(-e^{-u}\right) + C = e^{-u} + C\end{aligned}$$

Rücksubstitution:

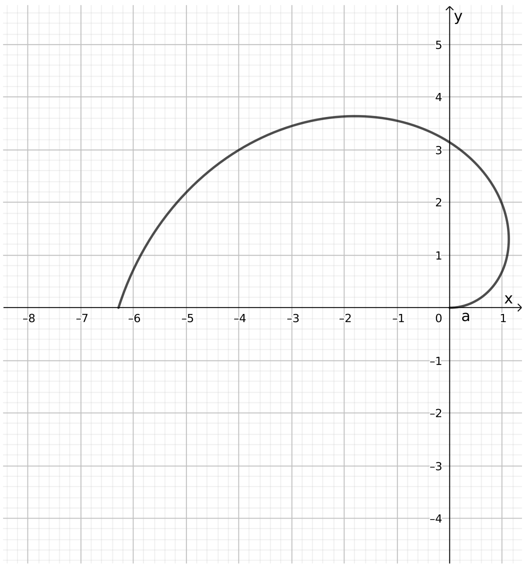
$$\int \sin(x)e^{-\cos(x)}dx = e^{-\cos(x)} + C$$

**Aufgabe 2**

Bei der durch

$$f : 0 \leq \varphi \leq \pi \quad ; r = 2 \cdot \varphi$$

gegebenen Figur handelt es sich um die erste halbe Umdrehung einer archimedeschen Spirale.




Berechnung der Fläche in Polarkoordinaten (Rotationssymmetrie!)

$$\begin{aligned} A = \iint dA &= \int_{r=0}^{2\varphi} \int_{\varphi=0}^{\pi} r dr d\varphi \\ &= \int_0^{\pi} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^{2\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{4\varphi^2}{2} d\varphi \\ &= 2 \left[ \frac{1}{3} \varphi^3 \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^3 \end{aligned}$$

**Aufgabe 3**

Differentialgleichung

$$y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$$

(a) $y(x) = (x+C)^2+C^2$, $(x > 0)$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$\begin{aligned} y &= (x+C)^2 + C^2 = x^2 + 2xC + 2C^2 \\ y' &= 2x + 2C \end{aligned}$$

in die DGL:

$$\begin{aligned} &(2x+2C)^2 - 2x(2x+2C) - 2(x^2+2xC+2C^2) + 2x^2 \\ =&(4x^2 - 8xC + 4C^2 - 4x^2 - 4xC - 2x^2 - 4xC - 4C^2 + 2x^2 \\ =&0 \end{aligned}$$

(b) $y(x) = x^2/2$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{2} \\ y' &= \frac{2}{2}x = x \end{aligned}$$

in die DGL:

$$x^2 - 2xx - 2\frac{x^2}{2} + 2x^2 = x^2 - 2x^2 - x^2 + 2x^2 = 0$$

(c) Die Lösung in a) enthält einen freien Parameter, sie ist die allgemeine Lösung der DGL $y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$. Die Lösung in b) ist eine spezielle (oder partikuläre Lösung).

**Aufgabe 4**

Die DGL $\dot{y}(t) + y(t) = 0$ soll unter der Bedingung $y(0) = 5$ gelöst werden

a) über die Laplace-Transformation der DGL (mit $F(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} &= 0 \\ s \cdot F(s) - y(0) + F(s) &= 0 \\ F(s)(s+1) &= 5 \\ F(s) &= \frac{5}{s+1} = 5\frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

Rücktransformation: mit $a = 1$ gilt

$$e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$$
$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} = e^{-t}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$5\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} = 5e^{-t}$$

b) Lösung über Separation:

$$\begin{aligned} \dot{y(t)} &= -y(t) \\ \frac{y}{dy} &= -1dx \\ \ln(|y(t)| &= -t + \ln(|C|) \\ y(t) &= C \cdot e^{-t} \end{aligned}$$

Aus der Bedingung $y(0) = 5$ ergibt sich die Konstante $C = 5$ und damit wieder die Lösung

$$y(t) = 5e^{-t}$$

c) Der Vorteil der Laplace-Transformation ist die Lösung der DGL durch Transformation der Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung, die einfach nach der Bildfunktion der gesuchten Lösung aufgelöst werden kann.

**Aufgabe 5**

Es handelt sich um eine lineare, inhomogene DGL 1.Ordnung. Lösung über Variation der Konstanten: die zugehörige homogene DGL ist

$$y_0' + y = 0$$
$$y_0 = C \cdot e^{-\int 1dx} = C \cdot e^{-x}$$

i) Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten: Ansatz ist

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x) \cdot e^{-x} \\ y'(x) &= C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$\begin{aligned} y' + y = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} &= 2x + 5 \\ \Rightarrow \quad C'(x)e^{-x} &= 2x + 5 \\ \Rightarrow \quad C'(x) &= e^x(2x + 5) \end{aligned}$$

Integration (partiell) liefert die Funktion $C(X)$

$$\begin{aligned} C(x) &= \int e^x(2x+5)dx = e^x(2x+5) - \int e^x 2dx \\ &= e^x(2x+5) - 2e^x + C = e^x(2x+3) + C. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x) \cdot e^{-x} = (e^x(2x+3) + C) \cdot e^{-x} \\ &= C \cdot e^{-x} + 2x + 3. \end{aligned}$$

ii) Lösung der inhomogenen DGL durch Aufsuchen einer partikulären Lösung: Ansatz ist $y_p(x) = ax + b, y_p'(x) = a$. Eingesetzt in die DGL:

$$\begin{aligned} y_p' + y_p &= a + ax + b = 2x + 5 \\ &\Rightarrow \quad a = 2, b = 3 \\ y_p(x) &= 2x + 3 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = y_0(x) + y_p(x) = Ce^{-x} + 2x + 3$.

**Aufgabe 6**

$f(x) = \pi \cdot \sin(x)$ soll in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x)\cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(nx) dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x)\sin(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\sin(nx) dx = \begin{cases} \pi & \text{für} \quad n = 1 \\ 0 & \text{für} \quad n \neq 1 \end{cases}$$

Als einziger Term bleibt also $b_1 = \pi$, in die Fourier-Reihe eingesetzt folgt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = b_1 \sin(1 \cdot x) = \pi \cdot \sin(x).$$

Einfacher findet man die Lösung, wenn man ausnutzt, dass der Sinus ungerade ist, es müssen also alle geraden Terme verschwinden ($a_0 = 0, a_n = 0$). Schreibt man die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \dots$$

aus, erkennt man über einen einfachen Koeffizientenvergleich sofort, dass $b_1 = \pi$.

### Aufgabe 7

Das Raumschiff der Masse $m$ erfährt eine Kraft $F =$ const, es beschleunigt nach

$$F = m \cdot a \;\Leftrightarrow\; F = m\ddot{z(t)}$$

(a) Das Einschalten zum Zeitpunkt $t = 0$ kann über die Heaviside-Funktion modelliert werden

$$H : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, t \to \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq 0 \\ 1 & \text{falls } t > 0 \end{cases},$$

also ergibt sich für die zu lösende DGL

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) - \frac{F}{m} H(t) = 0.$$

oder für $t > 0$

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) - \frac{F}{m} = 0.$$

(b) Lösung der DGL in zwei Schritten:

$$\ddot{z} = \frac{F}{m} = K$$

$$\int \ddot{z} dt = \int K dt \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = K \cdot t + C$$

mit $\dot{z}(t = 0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1$

$$\int \dot{z} dt = \int Kt + 1 dt \quad \Rightarrow \quad z(t) = K\frac{t^2}{2} + 1 \cdot t + C$$

mit $z(t = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

$$\Rightarrow z(t) = K\frac{t^2}{2} + t = \frac{F}{2m}t^2 + t$$