Aufgabe 1

(7 Punkte):
Fläche des Rechtecks mit der oberen Begrenzung
$P(x; y = f(x))$ ist $A = 2 \cdot x \cdot y = 2x(4 - x^2)$.
Berechnung des Maximums:

$$A'(x) = 8 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Die zweite Ableitung ist

$$A''(x) = -12x; \quad \Rightarrow A''(\frac{2}{\sqrt{3}}) = -\frac{24}{\sqrt{3}} < 0$$

Es handelt sich also um ein Maximum. Die negative Lösung entspricht der Messung der Breite in Gegenrichtung und beschreibt trotz umgekehrtem Vorzeichen dieselbe Fläche.

Der Flächeninhalt ist $A = \frac{32}{3\sqrt{3}}$.

Aufgabe 2

(14 Punkte):

(a) P' entsteht aus P durch Spiegelung an der Wnkelhalbierenden, also

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \to \quad P' = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Die Matrixgleichung $AP = P'$ beschreibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= x_2 && \Rightarrow a_{11} = 0; a_{12} = 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= x_1 && \Rightarrow a_{21} = 1; a_{22} = 0 \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Bei einer Spiegelung an der y-Achse ergibt sich aus P der Punkt

$$P'' = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

die Matrix lässt sich wie oben berechnen, es ist

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Die Drehung um $\pi/2$ um den Ursprung überführt P in den Punkt

$$Q = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

die Matrix zur Drehung ist

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es gilt $B \cdot A = C$. Die Drehung kann durch eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden und eine Spiegelung an der y-Achse ersetzt werden.

(d) Die Matrix A ist invertierbar, wenn es eine inverse Matrix A^{-1} mit der Eigenschaft $A \cdot A^{-1} = I$ gibt. Berechnung über das Gauß-Jordan-Verfahren (die Zeilen können vertauscht werden)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

(10 Punkte)
Zur Näherung wird das MacLaurin-Polynom $T_2(x)$ der Funktion $f(x) = \sqrt{4+x}$ bestimmt. Benötigt werden

$$f(x) = \sqrt{4+x} = (4+x)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow f(0) = \sqrt{4} = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(4+x)^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (4+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4 \cdot 8} = -\frac{1}{32}$$

Das Polynom lautet ($0!$ ist als eins definiert):

$$T_2(x) = \frac{1}{0!} f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 = 2 + \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{2}\frac{1}{32} x^2$$

Das Polynom kann als Näherung für die Wurzel benutzt werden, es ist

$$\sqrt{4,2} = f(0,2) \approx T_2(0,2) = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,2 - \frac{1}{64} 0,2^2 = 2,049375$$
$$\sqrt{4,4} = f(0,4) \approx T_2(0,4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,4 - \frac{1}{64} 0,4^2 = 2,0975$$

Aufgabe 4

(9 Punkte)
Alle gegebenen Funktionen sind ableitbar.

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+2}{x^2+2x+1} \\ f'(x) &= \frac{2x(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(x+1)[2x(x+1) - 2(x^2+2)]}{(x+1) \cdot (x+1)^3} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - 2x^2 - 4}{(x+1)^3} \\ &= \frac{2x-4}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= 12e^x \\ f'(x) &= 12 \cdot (e^x)' = 12e^x \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{12x} \\ f'(x) &= e^{12x} \cdot 12 = 12e^{12x} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{12 \cdot \sin(x)} \\ f'(x) &= e^{12 \cdot \sin(x)} \cdot 12 \cdot \cos(x) = 12 \cos(x) \cdot e^{12 \cdot \sin(x)} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(15 Punkte)
Symmetrie: $f(-x) = e^{-x}((-x)^2 - 5(-x) + 5) = e^{-x}(x^2 + 5x + 5)$. Die Funktion ist nicht symmetrisch.
Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) = e^x(x^2 - 5x + 5) &= 0 \\ x^2 - 5x + 5 &= 0 \\ \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Extrema:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x^2 - 5x + 5) + e^x(2x - 5) = e^x(x^2 - 3x) = 0 \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x_3 &= 0\ ;\ \ x_4 = 3 \\ f(0) &= 5\ ;\ \ f(3) = -e^3. \\ f''(x) &= e^x(x^2 - 3x) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 3) \\ f''(0) &= -3 < 0\ ;\ \ f''(3) = 3e^3 > 0 \end{aligned}$$

Die Funktion hat also ein (lokales) Maximum in $(0/5)$ und ein (lokales) Minimum in $(3/-e^3)$.
Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x(x^2 - 3x) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 3) = 0 \\ x^2 - x - 3 &= 0 \\ \Rightarrow x_{5,6} &= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \\ f(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}) &\approx 7,89 \\ f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}) &\approx 4,13 \end{aligned}$$

Die Wendepunkte sind $(2,30/7,89)$ und $(-1,30/4,13)$. $f''(0) = e^0(0-0-3) = -3 < 0$, die Funktion ist also zwischen den Wendepunkt rechtsgekrümmt.

Asymptoten: das Polynom hat keine Polstellen, Verhalten für $x \to \pm\infty$ (für negative Werte wird zweimal die Regel von de L'Hospital benutzt):

$$\lim_{x\to\infty} e^x(x^2-5x+5) = \lim_{x\to\infty} e^x \cdot \lim_{x\to\infty}(x^2-5x+5) = +\infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2-5x+5) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(-x)^2+5x+5}{e^x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0+\end{aligned}$$

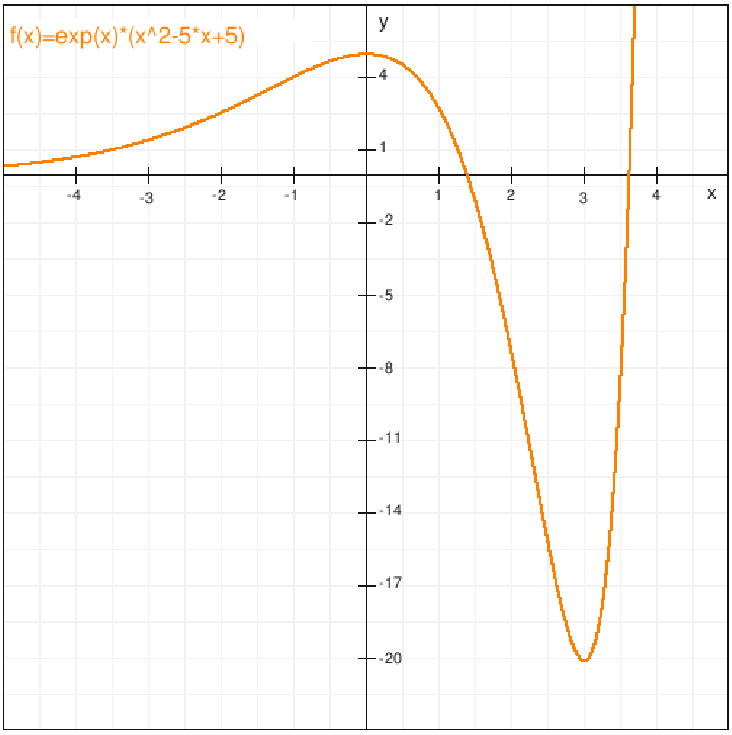

Abbildung 1: die Funktion $f(x) = e^x(x^2-5x+5)$ im Intervall $[-5; 5]$.