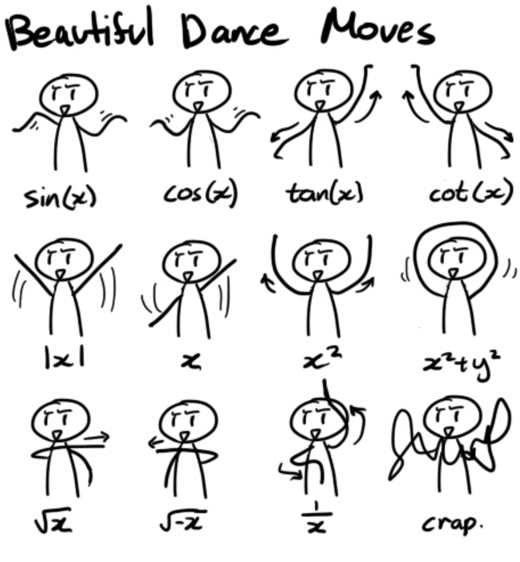
Übungsklausur Mathematik I

TMM18

Zeit: 90Min.
Insgesamt erreichbare Punktzahl: 53, 100%: 50 Punkte.



Aufgabe 1

Gegeben ist die Relation

$$r(x) = \frac{1}{|5x-1|}$$

mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

(a) Handelt es sich um eine Funktion? Schreiben Sie $r(x)$ in betragsfreier Form und untersuchen Sie die Relation auf Symmetrie.

(b) Untersuchen Sie, ob die zugehörige Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } a_n = \frac{1}{|5n-1|}$$

einen Grenzwert besitzt

(c) Wie verhält sich $r(x)$ für große/kleine Variablenwerte?

(d) Skizzieren Sie $r(x)$ mit Definitionsbereich $D = [-1; 5]$.

Aufgabe 2

Alfred B. Trüger versucht seinem Kommilitonen Stu Dent zu beweisen, dass $2 \cdot 2 = 5$ ist:

$$20 = 20 \tag{1}$$
$$-20 = -20 \tag{2}$$
$$0 - 20 = 0 - 20 \tag{3}$$
$$16 - 16 - 20 = 25 - 25 - 20 \tag{4}$$
$$16 - 36 = 25 - 45 \tag{5}$$
$$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4} \tag{6}$$
$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \tag{7}$$
$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} \tag{8}$$
$$2 \cdot 2 = 5 \tag{9}$$

Stu glaubt das nicht (er hat recht!). Wo liegt der erste Fehler im obigen "Beweis"?

Aufgabe 3

f und g seien reelle Funktionen und $u = f + g, v = f - g$.

(a) Warum sind f und g stetig, wenn sowohl u als auch v stetig sind?

(b) Warum folgt aus der Stetigkeit von u allein nicht die Stetigkeit von f und g (Hinweis: es lässt sich leicht ein Gegenbeispiel finden)?

Aufgabe 4

Berechnen Sie mit Hilfe der Euler-Relation

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

die Potenzreihen des Sinus und des Kosinus.

Aufgabe 5

Eine komplexe Zahl z wird in der Gaußschen Zahlenebene durch den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und die Länge $r = 2\sqrt{2}$ dargestellt
($\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

a) Skizzieren Sie die Zahl in der Gauß-Ebene

b) Stellen Sie die Zahl in der kartesischen Form als $z = a + i \cdot b$ dar

c) Wie lautet der Betrag $|z|$ und die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ zu z?

Aufgabe 6

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

für alle $n \in \mathbb{N}; n > 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 7

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des Sinus den Grenzwert

$$\lim_{n \to 0+} (\sin(x))^x$$

(Hinweis: $\lim_{x \to 0+} x^x = 1$).

b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n}{2n+1}$ gegen den Grenzwert $g = \frac{1}{2}$ konvergiert

c) und dass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ eine Nullfolge ist.