Musterlösung zur Übungsklausur Mathematik 1 TMM18

M. Oettinger 3.2019

Zeit: 90Min.

Aufgabe 1

a) $r(x)$ ist eine eindeutige Zuordnung (die Polstelle ist im Definitionsbereich ausgenommen $\Rightarrow$ es ist eine Funktion. Betragsfreie Darstellung:

$$r(x) = \frac{1}{|5x-1|} = \begin{cases} \frac{1}{5x-1} & \text{für} x > \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5x-1} & \text{für} x < \frac{1}{5} \end{cases}$$

Symmetrie: falls $x > 1/5$ ist

$$f(-x) = \frac{1}{|5(-x)-1|} \neq f(x)$$
$$\text{und } \neq -f(x)$$

Die Funktion ist nicht symmetrisch.

b) Grenzwert der Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } a_n = \frac{1}{|5n-1|}$$

Für große n scheinen sich die a_n gegen $a = 0$ zu entwickeln.

$$\left|\frac{1}{5n-1} - 0\right| = \frac{1}{5n-1} < \varepsilon$$
$$5n > \frac{1}{\varepsilon} + 1$$
$$n > \frac{1}{5\varepsilon} + \frac{1}{5}$$

Ab dem gefundenen Wert für n sind alle Folgenglieder kleiner als ein beliebig kleiner Wert ε.

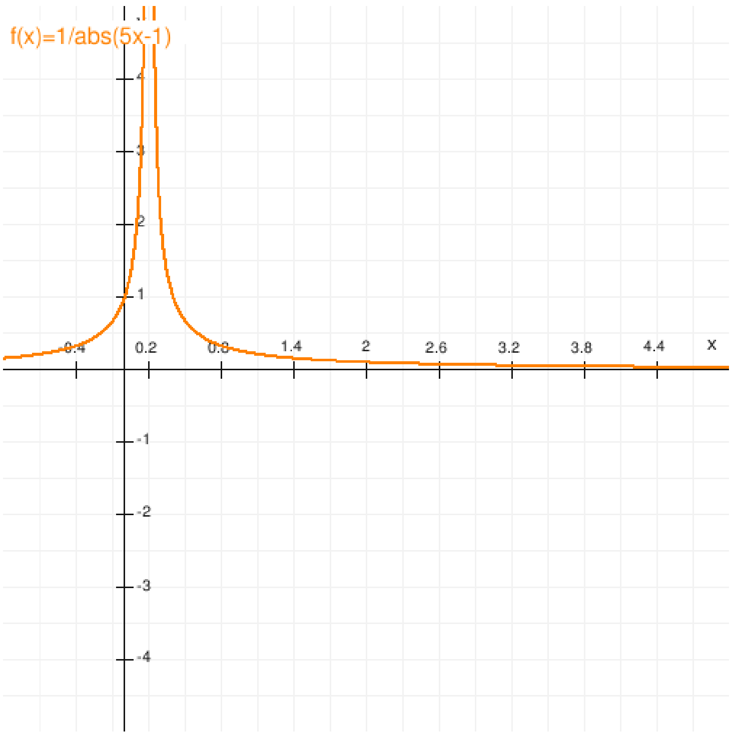
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|5n-1|} = 0$$

c)

$$\lim_{x\to\infty} frac1|5x-1| = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{5x-1} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} frac1|5x-1| = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{5x-1} = 0$$

Es handelt sich um einen Quotient zweier Polynome, der Grad des Nenners (1) ist größer als der des Zählers (0).

d) Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

Der Fehler liegt beim Übergang von Zeile (7) nach (8), denn

$$4 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2} \neq 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$

Die Funktion $x \longmapsto x^2$ ist nicht bijektiv (eineindeutig) und damit nicht umkehrbar - deshalb hat die Wurzel eine positive und eine negative Lösung. Aus der Aussage $(-a)^2 = a^2$ folgt eben nicht, dass $a = -a$ (falls $a \neq 0$).

Aufgabe 3

(a) f und g lassen sich jeweils als Summe von u und v darstellen:

$$f = \frac{1}{2}(u+v), \qquad g = \frac{1}{2}(u-v).$$

Die Summe zweier stetiger Funktionen ist immer stetig.

(b) Wir wählen eine unstetige Funktion, beispielsweise $f = \frac{1}{x}$ und $g(x) = -f(x)$. Dann ist die Summe der beiden Funktionen

$$u = f + g = 0$$

stetig, die einzelnen Funktionen aber nicht.

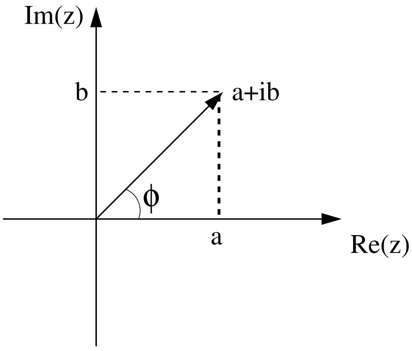
Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \frac{1}{0!}\cdot 1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + ... \\
&= \frac{1}{0!}\cdot 1 + i\frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + -i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ... \\
&= \frac{1}{0!}\cdot 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ... \\
&+ i\left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ...\right)
\end{aligned}$$

Mit der Euler-Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1} \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{2k}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5



a)

b) Kartesische Darstellung: mit $a = r\cos(\varphi), b = r\sin(\varphi)$ und $z = a + ib$ folgt unter Ausnutzen von $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$z = a + ib = 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 + i \cdot 2$$

c) der Betrag $|z|$ ist natürlich $r = 2\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z} = 2 - i \cdot 2$

Aufgabe 6

i) Induktionsanfang: mit $n_0 = 1$

$$1^1 = \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}1$$

ii) Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} +(n+1) \\
&= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1}{2} = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1)
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

a) Grenzwert

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+}(\sin(x))^x &= \lim_{x\to 0+}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)^x \\
&= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots\right)^x \\
&= \lim_{x\to 0+} x^x \cdot \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \dots\right)^x \\
&= \lim_{x\to 0+} x^x \cdot \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \dots\right)^x \\
&= 1 \cdot \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{1!}\right)^x = 1
\end{aligned}$$

b) Grenzwert:

$$a_n = \frac{n}{2n+1}, \quad \text{Grenzwert } a = \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-(2n+1)}{2(2n+1)}\right| = \left|\frac{-1}{4n+2}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{4n+2} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} > 4n+2$$

$$n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$$

c) Nullfolge

$$b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \ \text{ erweitert:}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \\
&= \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}
\end{aligned}$$

$$\left|\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} - 0\right| = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} < \frac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow n-1 > \frac{1}{\varepsilon^2} \quad \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} + 1$$