Musterlösung zur Klausur Mathematik 1 (TMM19)

M. Oettinger 28.03.2019

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(14 Punkte)

$$r(x) = |(x-2)^2 - 2|$$

a) $r(x)$ ist eine eindeutige Zuordnung und damit eine Funktion. Betragsfreie Darstellung:

$$r(x) = |(x-2)^2-2| = \begin{cases} (x-2)^2 - 2 & \text{für } x < 2-\sqrt{2} \\ -((x-2)^2-2) & \text{für } 2-\sqrt{2} \leq x \leq 2+\sqrt{2} \\ (x-2)^2 - 2 & \text{für } x > 2+\sqrt{2} \end{cases}$$

Symmetrie:

$$f(-x) = |(-x-2)^2 - 2| = |(x+2)^2 - 2|$$
$$f(-x) \neq f(x) = |(x-2)^2 - 2|$$
$$f(-x) \neq -f(x) = -|(x-2)^2 - 2|$$

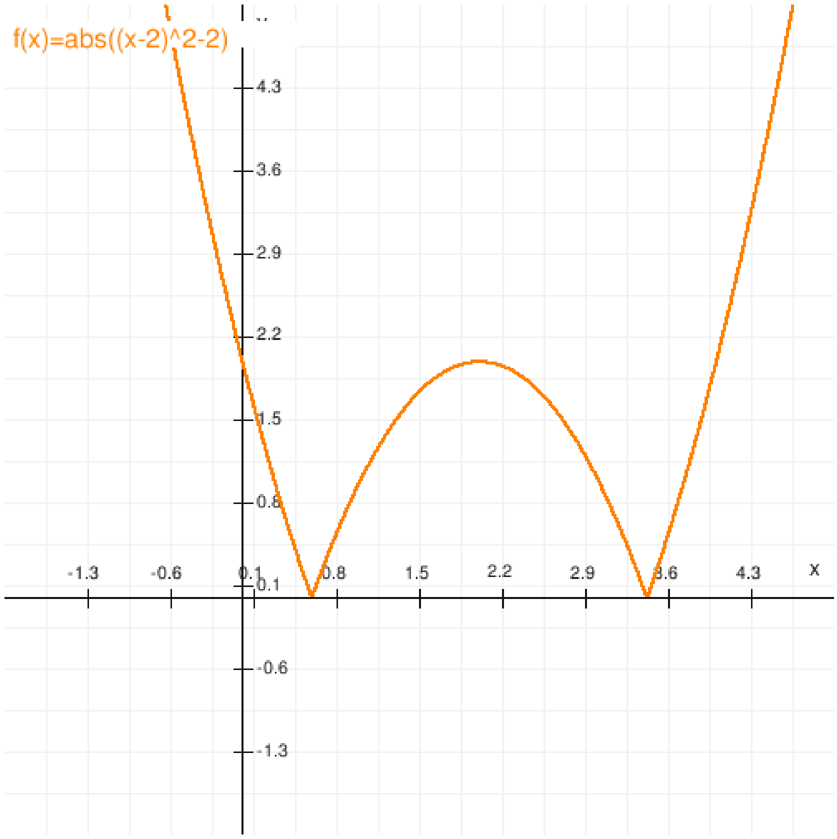
$\Rightarrow$ die Funktion ist nicht symmetrisch.

b) Die Funktion ist nicht monoton (sie ist monoton fallend bis zur ersten Nullstelle, danach steigt sie an). In den Nullstellen ist der linksseitige Grenzwert gleich dem rechtsseitigen, die Funktion ist definiert $\Rightarrow$ sie ist stetig.

c) Verhalten für große/kleine Variablenwerte:

$$\lim_{x\to\infty} |(x-2)^2 - 2| = \lim_{x\to\infty} (x-2)^2 - 2 = \lim_{x\to\infty} x^2 - 4x + 2 = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} |(x-2)^2 - 2| = \lim_{x\to\infty} ((-x)-2)^2 - 2 = \lim_{x\to\infty} x^2 + 4x + 2 = +\infty$$

d) Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

(12 Punkte)
Lösungen der Gleichungen

a) $x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = 0$, die erste Lösung $x_1 = 1$ lässt sich einfach erraten.
Durch Polynomdivision durch den Faktor $(x - 1)$:

$$
\begin{array}{rrrr}
\big(& x^3 + 6x^2 & + 5x & - 12\big) : \big(x - 1\big) = x^2 + 7x + 12 \\
& - x^3 \;\; + x^2 & & \\
\hline
& 7x^2 & + 5x & \\
& - 7x^2 & + 7x & \\
\hline
& & 12x & - 12 \\
& & - 12x & + 12 \\
\hline
& & & 0
\end{array}
$$

die weiteren Lösungen z. B. durch quadratisches Ergänzen:

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + 12 &= 0 \\ x^2 + 2\frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 12 &= 0 \\ x_{2/3} &= -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \\ x_2 &= -3; \quad x_3 = -4 \end{aligned}$$

b) Mit der Summe (kleiner Gauß)

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

wird die Berechnung einfacher:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{4} 5 + \sum_{k=1}^{15} k \prod_{i=1}^{3} i &= 4 \cdot 5 + \frac{15 \cdot (15+1)}{2} \cdot 3! \\ &= 20 + 120 \cdot 6 = 740 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x \cdot 4! + \sum_{k=1}^{3} k^2 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 24x + 1 + 4 + 9 \\ &= 24x + 14 = 0 \\ x &= \frac{-7}{12} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(9 Punkte) Abschätzung über das Majorantenkriterium:

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k \cdot k} = b_k$$

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert. Da alle Reihenglieder $a_k < b_k$ ($k > 0$), konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Berechnung der Summe:

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

die Partialsumme s_n lautet

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

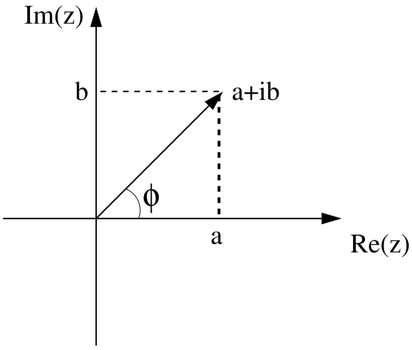
Aufgabe 4

(6 Punkte)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} - 1}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \cdots - 1\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \dots\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}x^2 - \frac{1}{6!}x^4 + \frac{1}{8!}x^6 - \dots\right) \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2!} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

(14 Punkte)

a) 

b) Kartesische Darstellung: mit $a = r\cos(\varphi), b = r\sin(\varphi)$ und $z_1 = a + ib$ folgt unter Ausnutzen von $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$z_1 = a + ib = 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 + i \cdot 2$$

Die Polardarstellung ist

$$z_1 = re^{i\cdot\varphi} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

c) der Betrag $|z|$ ist natürlich $r = 2\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_1} = 2 - i \cdot 2$.

d)

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (2 + 2i)(1 + 2i) = 2 + 4i + 2i + 4i^2 \\ &= 2 + 6i - 4 = -2 + 6i \\ \frac{z_2}{z_1} &= \frac{z_2 \cdot \overline{z_1}}{z_1 \cdot \overline{z_1}} = \frac{1}{|\overline{z_1}|^2} \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} = \frac{(1 + 2i)(2 - 2i)}{(2\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{6 + 2i}{8} = \frac{1}{4}(3 + i) \end{aligned}$$