Musterlösung zur Klausur Mathematik 3 TMM19

M. Oettinger 2020

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(6 Punkte) Doppelintegral

$$\iint\limits_{(A)} \frac{x}{2} dA$$

über den Bereich $(A) : y = x^2; 0 \leq x \leq 2$: kartesische Koordinaten sind geeignet

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{(A)} \frac{x}{2} dA &= \int_0^2 \int_0^{y=x^2} \frac{x}{2} dx dy \\
&= \int_0^2 \frac{x}{2} [y]_0^{x^2} = \int_0^2 \frac{x}{2} x^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 2 \cdot 2^2}{2^2} = 2
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(10 Punkte) Berechnung von Integralen:

a) Nutzt man aus, dass $\cos(-x) = \cos(x)$:

$$\int_0^\pi (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx = \int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx$$

und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, so folgt

$$\int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx = \int_0^\pi 1 dx = [x]_0^\pi = \pi$$

b)

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(3x^2)dx \quad \text{Substitution: } u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(3x^2)dx = \int_{u=0}^{u=\sqrt{\pi/3}^2} 2x\sin(3u)\frac{du}{2x}$$
$$= \int_0^{\pi/3} \sin(3u)du = \frac{1}{3}\left[-\cos(3u)\right]_0^{\pi/3} = \frac{2}{3}$$

c)

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} e^{ix} + e^{-ix}dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x) + i\sin(x) + \cos(x) - i\cos(x)dx$$
$$= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 2\cdot\cos(x)dx = \left[2\sin(x)\right]_0^{\frac{3\pi}{2}}$$
$$= 2\cdot\sin(\frac{3\pi}{2}) - 0 = -2$$

Aufgabe 3

(7 Punkte)

(a)

$$y' + 2y = e^{2y} \tag{1}$$
$$y'' - y + 4x = 0 \tag{2}$$

Gleichung (1) ist eine nichtlineare, homogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.
Gleichung (2) ist eine lineare, inhomogene und gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung.

(b) Die allgemeine Lösung der DGL (1) enthält (DGL 1. Ordnung) einen freien Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(c) Die allgemeine Lösung der DGL (2) enthält (DGL 2. Ordnung) zwei freie Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(d) Durch die Randbedingung wird einer der beiden freien Parameter festgelegt, es bleiben noch immer unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 4

(16 Punkte) Die Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{3}{2}y(x) = \frac{9}{2}e^{3x}$$

ist eine lineare, inhomogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

a) Die zugehörige homogene DGL kann über Separation der Variablen gelöst werden:

$$\begin{aligned} y_0'(x) + \frac{3}{2}y_0(x) &= 0 \\ \int \frac{dy_0}{y_0} &= -\frac{3}{2}\int dx \\ y_0(x) &= C \cdot e^{-\frac{3}{2}x} \end{aligned}$$

Aufsuchen einer partikulären Lösung: ein geeigneter Ansatz ist der verallgemeinerte Störterm

$$\begin{aligned} y_p(x) &= a \cdot e^{bx} \quad \Rightarrow \quad y_p'(x) = abe^{bx} \\ y_p'(x) + \frac{3}{2}y_p(x) &= ab \cdot e^{bx} + \frac{3}{2}a \cdot e^{bx} \\ &= \left(ba + \frac{3}{2}a\right) a^{bx} = \frac{9}{2}e^{3x} \quad \Rightarrow \quad b = 3 \\ \left(3a + \frac{3}{2}a\right) &= \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 1 \\ y_p(x) &= e^{3x} \\ y(x) &= y_0(x) + y_p(x) = C \cdot e^{-\frac{3}{2}x} + e^{3x} \end{aligned}$$

mit $y(0) = C + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

$$y(x) = e^{3x}$$

b) mit Hilfe der Laplace-Transformation Transformation der DGL:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'(x)\} + \frac{3}{2}\mathcal{L}\{y(x)\} &= \frac{9}{2}\mathcal{L}\{e^{3x}\} \\
sF(s) - y(0) + \frac{3}{2}F(s) &= \frac{9}{2}\frac{1}{s-3} \\
F(s)\left(s + \frac{3}{2}\right) &= \frac{9}{2}\frac{1}{s-3} + 1 = \frac{9+2s-6}{2(s-3)} \\
&= \frac{2}{2(s-3)}\left(s+\frac{3}{2}\right) \\
F(s) &= \frac{1}{s-3} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-3}\} = e^{3x}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5

Differentialgleichung (6 Punkte)

$$y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$$

(a) $y(x) = (x+C)^2 + C^2$, $(x > 0)$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$
\begin{aligned}
y &= (x+C)^2 + C^2 = x^2 + 2xC + 2C^2 \\
y' &= 2x + 2C
\end{aligned}
$$

in die DGL:

$$
\begin{aligned}
&(2x+2C)^2 - 2x(2x+2C) - 2(x^2+2xC+2C^2) + 2x^2 \\
=&(4x^2 - 8xC + 4C^2 - 4x^2 - 4xC - 2x^2 - 4xC - 4C^2 + 2x^2 \\
=&0
\end{aligned}
$$

(b) $y(x) = x^2/2$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x^2}{2} \\
y' &= \frac{2}{2}x = x
\end{aligned}
$$

in die DGL:

$$x^2 - 2xx - 2\frac{x^2}{2} + 2x^2 = x^2 - 2x^2 - x^2 + 2x^2 = 0$$

(c) Die Lösung in a) enthält einen freien Parameter, sie ist die allgemeine Lösung der DGL $y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$. Die Lösung in b) ist eine spezielle (oder partikuläre Lösung).

Aufgabe 6

Bestimmung des Fourier-Koeffizienten b_2 für die 2π-periodische Sägezahnfunktion $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $0 \leq x < 2\pi$ mit periodischer Fortsetzung (10 Punkte):

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \\
b_2 &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin(2x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin(2x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi}{2} \sin(2x) dx - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{x}{2} \sin(2x) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} x \sin(2x) dx = 0 - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} x \sin(2x) dx \\
&= -\frac{1}{2\pi} \left[x \frac{(-\cos(2x))}{2} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(-\cos(2x))}{2} dx \\
&= -\frac{1}{2\pi} \left[x \frac{(-\cos(2x))}{2} \right]_0^{2\pi} - 0 = \frac{1}{2\pi} 2\pi \frac{\cos(4\pi)}{2} = \frac{\cos(4\pi)}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$