Lösung Übungsklausur Mathematik II

TMM19

Aufgabe 1

a) Für große n wird der Summand 1 keine Rolle mehr spielen, vermutlich ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Für hinreichend große n muss also gelten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \;\Leftrightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right| &= \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| \\
&= \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \\
n+1 &> \frac{1}{\varepsilon} \\
n &> \frac{1}{\varepsilon} - 1
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile kann für ein beliebig kleines ε sicher erfüllt werden, also ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

b) Für den zweiten Teil kann einfach umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n}{n+1}} \\
&= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Die Matrix A und die Vektoren x und b definieren ein lineares Gleichungssystem

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} \; ; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

a) Das LGS ist

$$\begin{array}{llll} 7x_1 & +3x_3 & +x_3 & = 14 \\ 6x_1 & +2x_3 & 2x_3 & = 16 \\ 2x_1 & +4x_3 & +x_3 & = 10 \end{array}$$

b) Die zweite Zeile kann durch 2 geteilt und anschließend von der ersten und von der dritten Zeile abgezogen werden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & 1 & 14 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Jetzt lässt sich die Determinante nach der dritten Spalte entwickeln:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(12+2) = -14$$

Die Determinante ist ungleich Null, also ist das LGS eindeutig lösbar.

c) Lösung über die Cramersche Regel:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(18-4) = -14$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(8+6) = -14$$

Für die Entwicklung der Determinante A_3 ist es sinnvoll, zur ersten Zeile das vierfache der Zeile III und zur zweiten Zeile das dreifache der Zeile

III zu addieren

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & 14 \\ 0 & 10 & 14 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 14 & 14 \\ 10 & 14 \end{vmatrix}$$
$$= -(14 \cdot 14 - 10 \cdot 14) = 4 \cdot (-14)$$

Damit ist die Lösung des LGS

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-14}{-14} = 1$$
$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-14}{-14} = 1$$
$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{4 \cdot (-14)}{-14} = 4$$

Aufgabe 3

Nach dem 2. Newtonschen Axiom ist $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t) = m \cdot \ddot{\vec{s}}(t)$. Da $\vec{s}(t)$ nur einen Beitrag in y-Richtung enthält, genügt es natürlich, diese Richtung zu betrachten:

$$s(t) = \frac{e}{m} t^2$$
$$\dot{s}(t) = v(t) = \frac{2e}{m} t$$
$$\ddot{s}(t) = \dot{v}(t) = a(t) = \frac{2e}{m}$$
$$\Rightarrow F(t) = m \cdot a(t) = m \frac{2e}{m} = 2e$$

Oder wieder in Vektorschreibweise:

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

$$
\begin{aligned}
K(v) &= \frac{a^2 v}{v^2+b^2}, v>0 \\
\Rightarrow K'(v) &= \frac{a^2(v^2+b^2)-a^2v2v}{(v^2+b^2)^2} \\
&= \frac{a^2v^2+a^2b^2-2a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} \\
&= \frac{a^2b^2-a^2v^2}{(v^2+b^2)^2}
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung des Maximums wird die erste Ableitung Null gesetzt:

$$
\begin{aligned}
K'(v) = \frac{a^2b^2-a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} &= 0 \Leftrightarrow a^2b^2-a^2v^2=0 \\
\Leftrightarrow v^2 &= b^2 \\
\Leftrightarrow v_{1/2} &= \pm b
\end{aligned}
$$

Die zweite Ableitung lautet

$$
\begin{aligned}
K''(v) &= \frac{-2a^2v(v^2+b^2)^2-(a^2b^2-a^2v^2)2(v^2+b^2)2v}{(v^2+b^2)^4} \\
&= \frac{-2a^2v(v^2+b^2)-4v(a^2b^2-a^2v^2)}{(v^2+b^2)^3} \\
&= \frac{-2a^2v^3-2a^2b^2v-4a^2b^2v+4a^2v^3}{(v^2+b^2)^3} \\
&= \frac{2a^2v^3-6a^2b^2v}{(v^2+b^2)^3} \\
K''(b) &= \frac{2a^2b^3-6ba^2b^2}{(2b^2)^3} = \frac{-4a^2b^3}{8b^6} < 0 \text{ für b>0} \\
K''(-b) &= \frac{2a^2(-b)^3-6ba^2(-b)^2}{(2(-b)^2)^3} = \frac{4a^2b^3}{8b^6} \\
K(\pm b) &= \frac{a^2(\pm b)}{2b^2} = \pm\frac{a^2}{2b} > 0 \text{ für b>0}
\end{aligned}
$$

Weil $v>0$, ist die positive Lösung der Wurzel

$$v = +\sqrt{b^2}$$

korrekt. Die negative Lösung bedeutet hier einfach eine Geschwindigkeit in die Gegenrichtung und der größte Wert ist natürlich

$$K(b) = \frac{a^2 b}{2b^2} = \frac{a^2}{2b}$$

Aufgabe 5

a) Nullsetzen der ersten Ableitung liefert

$$f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}x,$$

einsetzen der Stelle $x = 2$:

$$a = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

Setzt man die Werte für x und a in die zweite Ableitung ein, so ergibt sich

$$f''(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2x + 2a = -3x + 2a = -6 + 2\frac{3}{2} = -3 < 0,$$

es handelt sich also um ein Maximum.

b) Die Steigung ergibt sich aus der ersten Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{4}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}3x + \frac{2}{3}\frac{4}{3} &= 0 \\ x_{1/2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{2} - \frac{8}{9}} &= 1 \pm \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Die Tangentengleichungen in den Stellen $x_{1/2}$ an die Kurve ergeben sich nach

$$\begin{aligned} t_{1/2}(x) &= f(x_{1/2}) + f'(x_{1/2}) \cdot (x - x_{1/2}) : \\ t_1(x) &= f(\frac{4}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) = 8,52 + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) \\ t_2(x) &= f(\frac{2}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3}) = 2,81 + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3}) \end{aligned}$$

c) $f(x)$ ist Polynom vom Grad 3 mit negativem Koeffizient an der höchsten Potenz, also gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm(-1)\infty$$

d) Die Funktion hat eine zweite Extremstelle bei $x = 0$, es ist

$$f''(0) = 2a > 0$$

also hat f(x) ein Minimum bei $(0; f(0) = 2)$ (Sie hat eine reelle Nullstelle, die schwer zu berechnen ist bei 3,36).

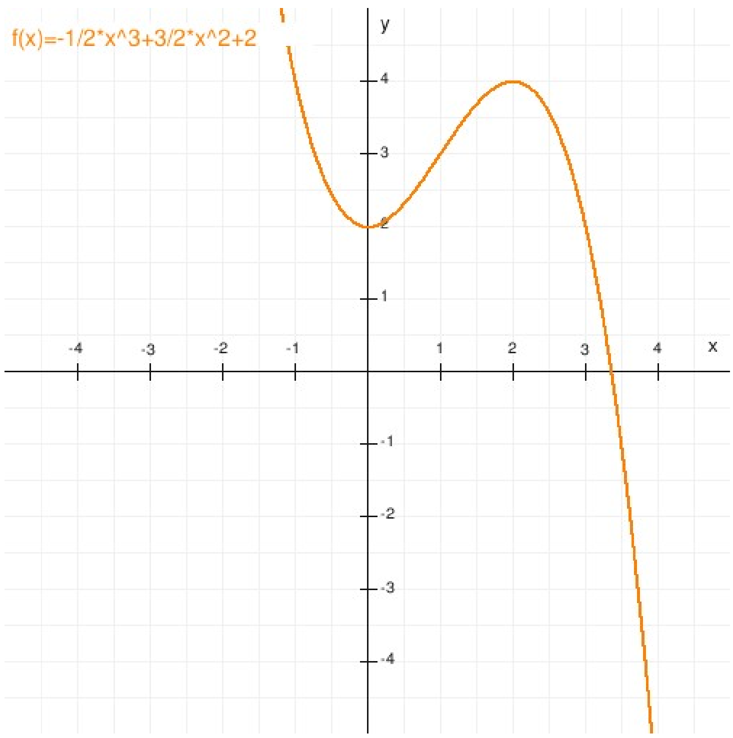

Abbildung 1: die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 2$ im Intervall $[-5; 5]$.

Aufgabe 6

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) = e^x(x^2-5x+5) &= 0 \\ x^2-5x+5 &= 0 \\ x^2 - 2\cdot\frac{5}{2} + 5 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 &= 0 \\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} - \frac{20}{4} = \frac{5}{4} \\ \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Extrema:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x^2-5x+5) + e^x(2x-5) = e^x(x^2-3x) = 0 \\ x^2-3x &= 0 \\ x_3 &= 0\ ;\ \ x_4 = 3 \\ f(0) &= 5\ ;\ \ f(3) = -e^3. \\ f''(x) &= e^x(x^2-3x) + e^x(2x-3) = e^x(x^2-x-3) \\ f''(0) &= -3 < 0\ ;\ \ f''(3) = 3e^3 > 0 \end{aligned}$$

Die Funktion hat also ein (lokales) Maximum in $(0/5)$ und ein (lokales) Minimum in $(3/-e^3)$.
Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x(x^2-3x) + e^x(2x-3) = e^x(x^2-x-3) = 0 \\ x^2-x-3 &= 0 \\ \Rightarrow x_{5,6} &= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \\ f(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}) &\approx -12,11 \\ f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}) &\approx 3,59 \end{aligned}$$

Die Wendepunkte sind $(2,30/-12,11)$ und $(-1,30/3,59)$. $f''(0) = e^0(0-0-3) = -3 < 0$, die Funktion ist also zwischen den Wendepunkt rechtsgekrümmt.

Asymptoten: das Polynom hat keine Polstellen, Verhalten für $x \to \pm\infty$ (für negative Werte wird zweimal die Regel von de L'Hospital benutzt):

$$\lim_{x\to\infty} e^x(x^2-5x+5) = \lim_{x\to\infty} e^x \cdot \lim_{x\to\infty}(x^2-5x+5) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2-5x+5) = \lim_{x\to\infty} \frac{(-x)^2+5x+5}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0+$$

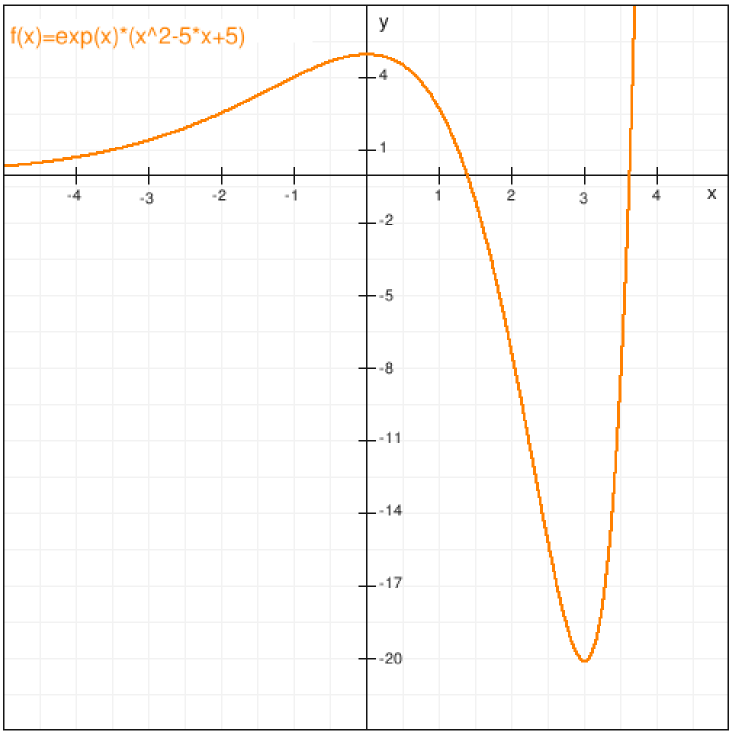

Abbildung 2: die Funktion $f(x) = e^x(x^2-5x+5)$ im Intervall $[-5; 5]$.

Aufgabe 7

Ableitung von

a)

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}:$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2+x}{2x-x^2} = \frac{x(x+1)}{x(2-x)} = \frac{x+1}{2-x} :$$
$$f'(x) = \frac{1\cdot(2-x)-(x+1)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+x+1}{(2-x)^2} = \frac{3}{(2-x)^2}$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(\sqrt{4x}) :$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{4x})\cdot\frac{1}{2}(4x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4 = \frac{\cos\sqrt{4x}}{\sqrt{4x}}$$

d)

$$f(x) = x^2\cdot\ln(x) :$$
$$f'(x) = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} = x(2\ln(x)+1)$$

Aufgabe 8

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3+2x^2+1 & &\Rightarrow f(1) = 4\\
f'(x) &= 3x^2+4x & &\Rightarrow f'(1) = 7\\
f''(x) &= 6x+4 & &\Rightarrow f''(1) = 10\\
f^{(3)}(x) &= 6 & &\Rightarrow f^{(3)}(1) = 6\\
f^{(n)}(x) &= 0 \text{ für } n>3. & &
\end{aligned}$$

Taylor-Entwicklung:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

da ab der vierten Ableitung alle weiteren verschwinden, gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{3}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \frac{4}{0!}(x-1)^0 + \frac{7}{1!}(x-1)^1 + \frac{10}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3.$$

Unter Ausnutzen von $0! = 1$ folgt nach ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} 4 + 7(x-1) + 7(x-1) + \frac{10}{2}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 \\ = x^3 + 2x^2 + 1. \end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung ist mit der ursprünglichen analytischen Darstellung identisch (da die Ableitungen einer Potenzreihe wieder eine Potenzreihe ergeben und die Darstellung der Funktion eindeutig ist). Daraus folgt für den Konvergenzradius natürlich, dass er dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ der Funktion entspricht.