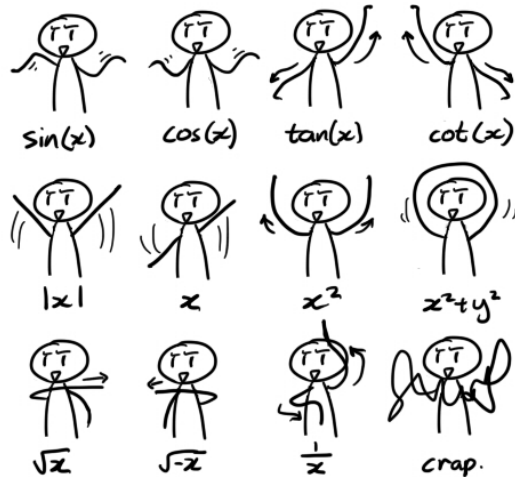


Übungsklausur Mathematik I

TMM19

Zeit: 90Min.

Beautiful Dance Moves



Aufgabe 1

Gegeben ist die Relation

$$r(x) = \left| \frac{x}{x^2 - 2x} \right|$$

- Handelt es sich um eine Funktion? Schreiben Sie $r(x)$ in betragsfreier Form, untersuchen Sie auf Symmetrie und geben Sie den Definitionsbereich an. Besitzt die Relation Extrema oder Nullstellen? Ist sie monoton?
- Skizzieren Sie die Relation oder Funktion in einem geeignet gewählten Intervall.

c) Die zur Relation gehörige Folge lautet

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = \left| \frac{n}{n^2 - 2n} \right|.$$

Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz. Wie wird sich die Relation $r(x)$ für große bzw. kleine Variablenwerte verhalten?

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass $3^n - 3$ für $n \in \mathbb{N}$ immer durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 3

Zwei Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ lauten

$$z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{und} \quad z_2 = 5e^{i\pi}.$$

- Bestimmen Sie die kartesische Darstellung $z_k = a_k + ib_k$, die Beträge $|z_k|$ und die komplex konjugierten Zahlen \bar{z}_k .
- Skizzieren Sie die beiden Zahlen in einer Gaußschen Ebene.
- Berechnen Sie $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_2}{z_1}$.

Aufgabe 4

Der Punkt P lässt sich in einem kartesischen Koordinatensystem durch den Vektor

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

beschreiben. Durch eine Spiegelung an der y -Achse ergibt sich daraus der Punkt Q . Die Spiegelung kann als Symmetrieoperation durch eine Matrix $A = (a_{ij})$ beschrieben werden, es gilt

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q$$

- (a) Wie lauten die Koordinaten des Punkts Q ? Berechnen Sie die Matrix A .
- (b) Stellen Sie die Matrix $B = (b_{ij})$ auf, die die Spiegelung an der x -Achse beschreibt.
- (c) Wie sieht die Matrix $C = (c_{ij})$, die eine Punktspiegelung am Ursprung beschreibt, aus? Was passiert, wenn das Produkt $A \cdot B$ auf den Punkt P angewendet wird? Was lässt sich daraus folgern?

Aufgabe 5

Lösen bzw. berechnen Sie

- a) die Gleichung

$$x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} = 0$$

- b)

$$\prod_{i=1}^4 i + \sum_{k=0}^4 k + \sum_{l=1}^3 2$$

- c)

$$4! + \sum_{k=0}^3 (2k + 1)$$