Musterlösung zur Übungsklausur Mathematik 1 TMM19

M. Oettinger 3.2020

Zeit: 90Min.

Aufgabe 1

a) Die Relation lautet

$$r(x) = \left|\frac{x}{x^2 - 2x}\right| = \left|\frac{x}{x(x-2)}\right| = \left|\frac{1}{x-2}\right|.$$

es handelt sich um eine eindeutige Zuordnung, also ist $r(x)$ eine Funktion, der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Betragsfreie Schreibweise:

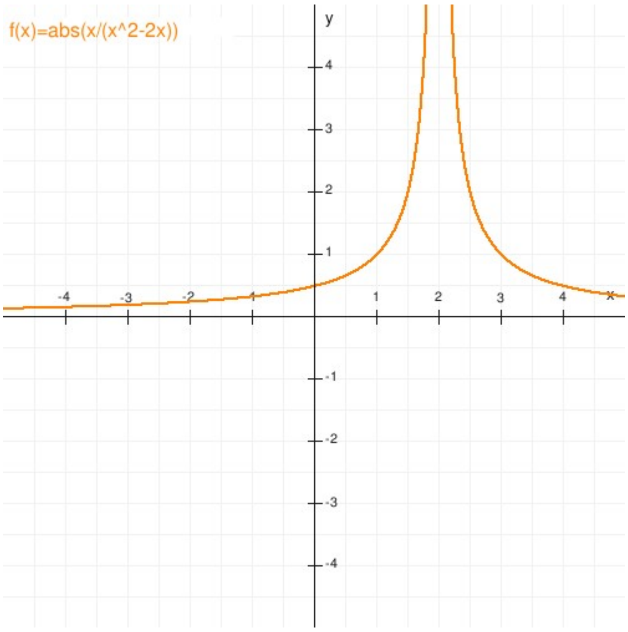
$$r(x) = \left|\frac{1}{x-2}\right| = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & x \geq 2 \\ \frac{-1}{x-2} & x < 2 \end{cases}$$

$r(x)$ ist nicht symmetrisch, denn $r(-x) = \frac{1}{-x-2} = -\frac{1}{x+2}$ ist ungleich $r(x)$ und ungleich $-r(x)$. Sie Besitzt keine Nullstellen

$$\left|\frac{1}{x-2}\right| \neq 0 \quad \forall x \in D$$

und ist nicht monoton (sie steigt für $x < 2$, sinkt für $x > 2$).

b)



c) Die zugehörige Folge ist eine Nullfolge (sie konvergiert gegen den Grenzwert $a = 0$, denn für ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ gilt für hinreichend große n

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n-2} - 0\right| = \frac{1}{n-2} < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} + 2$$

(die Bedingung ist erfüllt, falls n groß genug ist). Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Die Funktion $r(x)$ verhält sich für große Werte genauso $r(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$, für kleine Werte sorgt der Betrag für analoges Verhalten $r(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$.

Aufgabe 2

Behauptung: $3^n - 3$ ist für $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar.
Beweis über vollständige Induktion:

i) Induktionsanfang mit $n_0 = 1 : 3^1 - 3 = 0$

ii) Induktionsschritt, Voraussetzung: $3^n - 3$ ist durch 6 teilbar.

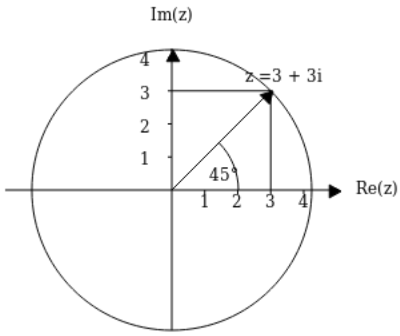
$$\begin{aligned}3^{n+1} - 3 &= 3^n \cdot 3 - 3 + 0 = 3^n \cdot 3 - 3 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \\ &= 3(3^n - 3) + 6\end{aligned}$$

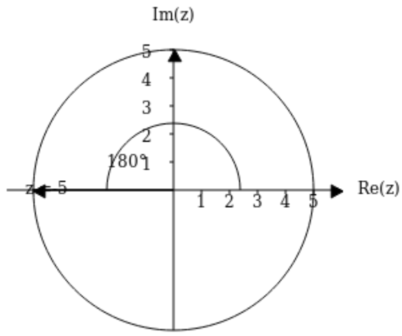
Der erste Summand ist nach Voraussetzung durch 6 teilbar.

Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned}z_1 &= 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})) = 3\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 3 + 3i \\ \bar{z_1} &= 3 - 3i \\ |z_1| &= \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{z_1 \cdot \bar{z_1}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\ z_2 &= 5e^{i\pi} = 5(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 5(-1 + 0) = -5 \\ \bar{z_2} &= -5 \\ |z_2| &= \sqrt{(-5)^2}\sqrt{z_2 \cdot \bar{z_2}} = 5\end{aligned}$$





b)

$$
\begin{aligned}
z_1 - z_2 &= 3 + 3i - (-5) = 8 + 3i \\
z_1 \cdot z_2 &= (3 + 3i)(-5) = -15 - 15i \\
\frac{z_2}{z_1} &= \frac{z_2 \bar{z_1}}{z_1 \bar{z_1}} = \frac{(-5)(3-3i)}{(3+3i)(3-3i)} = \frac{-15+15i}{9+9} = -\frac{5}{6}(1-i)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

(a) Q entsteht aus P durch Spiegelung an der y-Achse, lässt sich also als

$$
Q = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
$$

beschreiben. Die Matrixgleichung $AP = Q$ beschreibt das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= -x_1 & &\Rightarrow a_{11} = -1; a_{12} = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= x_2 & &\Rightarrow a_{21} = 0; a_{22} = 1 \\
A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(b) Bei einer Spiegelung an der x-Achse ergibt sich aus P der Punkt

$$
R = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}
$$

Die zugehörige Matrix B kann analog berechnet werden:

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 &= x_1 & \Rightarrow b_{11} = 1; b_{12} = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 &= -x_2 & \Rightarrow b_{21} = 0; b_{22} = -1 \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Die Matrix C überführt den Punkt P in $-P$, also

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Das Produkt $A \cdot B$ ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = C$$

Daraus kann geschlossen werden, dass die Punktspiegelung am Ursprung durch zwei Spiegelungen an den Koordinatenachsen ausgedrückt werden kann.

Aufgabe 5

Lösungen der Gleichungen

a) $x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} = 0$, die erste Lösung $x_1 = 1$ lässt sich einfach erraten. Durch Polynomdivision durch den Faktor $(x-1)$:

$$\begin{array}{l} \big(\; x^3 - \frac{1}{2}x^2 \;\; - x + \frac{1}{2}\big) : \big(x - 1\big) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ \underline{- x^3 \;\; + x^2} \\ \qquad\quad \frac{1}{2}x^2 \;\; - x \\ \qquad \underline{- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x} \\ \qquad\qquad\quad - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \qquad\qquad\quad \underline{\;\;\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

die weiteren Lösungen z. B. mit der $p-q-$Form

$$\begin{aligned} x_{2/3} &= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} \\ &= -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \\ &\Rightarrow x_2 = -1 \quad x_3 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\prod_{i=1}^{4} i + \sum_{k=0}^{4} k + \sum_{l=1}^{3} 2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3 \cdot 2 = 24 + 10 + 6 = 40$$

c)

$$4! + \sum_{k=0}^{3} (2k + 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 + 3 + 5 + 7 = 24 + 16 = 40$$