Musterlösung zur Übungsklausur
Mathematik III
TMM20

12.2021

Aufgabe 1

(a) Substitution mit $u = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{x^2}{2}du$

$$\int \frac{\cos(\frac{2}{x})}{x^2}dx = -\int \frac{\cos(u)}{x^2}\frac{x^2}{2}du$$
$$= -\frac{1}{2}\int \cos(u)du = -\frac{1}{2}\sin(u) + C$$

Rücksubstitution:

$$\int \frac{\cos(\frac{2}{x})}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\sin(\frac{2}{x}) + C$$

(b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4}$$
$$\Rightarrow\ (A+B)\cdot x = 0\ \Rightarrow\ A = -B$$
$$\Rightarrow\ 2A - 2B = 4A = 4\ \Rightarrow\ A = 1\ ;\ B = -1$$
$$\int \frac{4}{x^2-4}dx = \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x+2}dx$$
$$= \ln|x-2| - \ln|x+2| + C$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(3x^2)dx \quad \text{Substitution: } u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

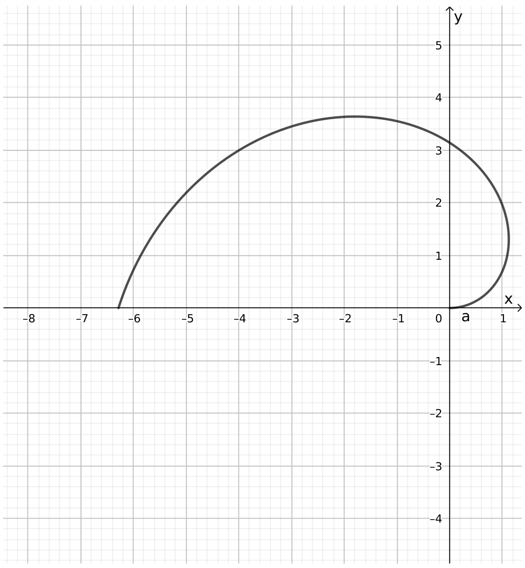
$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(3x^2)dx &= \int_{u=0}^{u=3\cdot\sqrt{\pi/3}^2} 2x\sin(u)\frac{du}{2x} \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin(u)du = \frac{1}{3}\left[-\cos(u)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bei der durch

$$f : 0 \leq \varphi \leq \pi \quad ; r = 2\cdot\varphi$$

gegebenen Figur handelt es sich um die erste halbe Umdrehung einer archimedeschen Spirale.



Berechnung der Fläche in Polarkoordinaten (Rotationssymmetrie!)

$$\begin{aligned}A = \iint dA &= \int_{r=0}^{2\varphi}\int_{\varphi=0}^{\pi} r\,dr\,d\varphi \\ &= \int_0^{\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi}\frac{4\varphi^2}{2}d\varphi \\ &= 2\left[\frac{1}{3}\varphi^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^3\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + 2y(x) = e^{3x} + 5xe^{3x}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$

a) durch Aufsuchen einer partikulären Lösung: die zugehörige homogene DGL

$$y_0' + 2y_0 = 0$$

kann durch Separation gelöst werden:

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dx} &= -2y_0 \\ \int \frac{dy_0}{y_0} &= -2 \int dx \\ \ln|y_0| &= -2x + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad y_0(x) = Ce^{-2x} \end{aligned}$$

Ein geeigneter Ansatz für die partikuläre Lösung ist

$$\begin{aligned} y_p(x) &= (a + bx)e^{3x} \\ y_p'(x) &= be^{3x} + (a + bx)e^{3x} \cdot 3 \\ y_p'(x) + 2y_p(x) &= be^{3x} + 3(a + bx)e^{3x} + 2(a + bx)e^{3x} \\ &= (b + 5a)e^{3x} + 5bxe^{3x} = e^{3x} + 5xe^{3x} \\ &\Rightarrow \quad 5bxe^{3x} = 5xe^{3x} \quad \Rightarrow \quad b = 1 \\ &\Rightarrow \quad (b + 5a)e^{3x} = 1 \cdot e^{3x} \quad \Rightarrow \quad a = 0 \\ y_p(x) &= (a + bx)e^{3x} = (0 + 1 \cdot x)e^{3x} = xe^{3x} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist

$$\begin{aligned} y(x) = y_0 + y_p &= Ce^{-2x} + xe^{3x}, \\ \text{mit } y(0) &= C \cdot 1 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \\ &\Rightarrow y(x) = xe^{3x} \end{aligned}$$

b) über die Laplace-Transformation (mit $y(0) = 0$) und

$$e^{ax} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}; \qquad xe^{ax} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s-a)^2}$$

kann die DGL transformiert werden:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'(x)\}+2\mathcal{L}\{y(x)\} &= \mathcal{L}\{e^{3x}\}+5\mathcal{L}\{xe^{3x}\}\\ sY(s)-y(0)+2Y(s) &= \frac{1}{s-3}+5\cdot\frac{1}{(s-3)^2}=\frac{s-3+5}{(s-3)^2}\\ Y(s)(s+2) &= \frac{1}{(s-3)^2}(s+2)\\ Y(s) &= \frac{1}{(s-3)^2}\end{aligned}$$

Die Lösung lässt sich durch Rücktransformation mit Hilfe der Korrespondenz $xe^{ax} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s-a)^2}$ jetzt sofort angeben

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=xe^{2x}$$

Aufgabe 4

Enwicklung von

$$f(x)=\begin{cases}-2 & \text{für } -\pi\le x<0\\ 2 & \text{für } 0\le x<\pi\end{cases}$$

mit ihrer 2π-periodischen Fortsetzung in eine Fourier-Reihe: die Funktion ist ungerade ($f(-x)=-f(x) \quad \forall\ x\in[-\pi,\pi]$), also ist $a_0=0; a_n=0$. Berechnung der b_n:

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-2)\sin(nx)dx+\int_0^{\pi}2\sin(nx)dx\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0}+\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi}\right)\\ &= \frac{2}{n\pi}\left(\cos(0)-\cos(-n\pi)-\cos(n\pi)+\cos(0)\right)\\ &\text{(mit } \cos(0)=1)\\ &= \frac{2}{n\pi}\left(2-\underbrace{2\cos(n\pi)}_{=-2 \text{ für ungerade } n, 2 \text{ für gerade } n}\right)\\ &= \begin{cases}\frac{8}{n\pi} & \text{für ungerade } n\\ 0 & \text{für gerade } n\end{cases}\end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

ist also mit dem neuen Index k und $(2k-1)$ für die ungeraden Glieder

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x)$$

Aufgabe 5

Anfangswertproblem:

$$2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \qquad y \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

Es handelt sich um eine lineare, gewöhnliche und inhomogene Differentialgleichung 1.Ordnung. Die normierte DGL laute

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x} - \frac{2}{\sqrt{x}^3} \qquad y \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

Die zugehörige homogene Gleichung $y_0' - \frac{1}{2x}y_0 = 0$ kann durch Trennung der Variablen gelöst werden (mit $a \cdot \ln(x) = \ln(x^a)$):

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2x}, \quad y_0 &= Ce^{\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx} \\ &= Ce^{\frac{1}{2}\ln|x|} = Ce^{\ln|\sqrt{x}|} = C \cdot \sqrt{x} \end{aligned}$$

Die inhomogene Gleichung wird durch Variation der Konstanten gelöst:

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } y &= C(x)\sqrt{x}, \\ y' &= C'(x)\sqrt{x} + C(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

eingesetzt in die inhomogene Gleichung $2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
2xC'(x)\sqrt{x} + \underbrace{\frac{2x}{2\sqrt{x}}C(x) - C(x)\sqrt{x}}_{=0} &= 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \\
2xC'(x)\sqrt{x} &= 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \\
C'(x) &= \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^2} \\
C(x) &= \frac{1}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}dx - \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}(-2)x^{-\frac{1}{2}} - (-1)\frac{1}{x} + K \\
&= -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + K
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = C(x)\sqrt{x} = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + K\sqrt{x}$$

Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblems (Bestimmung des freien Parameters K): $y \to -1$ für $x \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x}} &\to 0 \text{ für } x \to \infty \\
&\Longrightarrow -1 + K\sqrt{x} \to -1 \text{ für } x \to \infty \Longrightarrow K = 0.
\end{aligned}
$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 6

Bei der Differentialgleichung handelt es sich und eine partielle, lineare und homogene DGL 2.Ordnung, mit der Kettenregel abgeleitet ist

$$
\begin{aligned}
f(x+ct) &= (x+ct)^2 \\
f'(x+ct) &= 2(x+ct)\cdot 1 \\
f''(x+ct) &= 2\cdot 1\cdot 1 = 2 \\
\dot{f}(x+ct) &= 2(x+ct)\cdot c \\
\ddot{f}(x+ct) &= 2\cdot c\cdot c = 2c^2
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in die DGL:

$$\frac{\partial^2}{dx^2}f(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t) = 2 - \frac{c^2}{c^2}2 = 0.$$

Die Funktion ist eine Lösung. Natürlich ist auch $(x-ct)^2$ eine Lösung, weil $(-c)\cdot(-c) = +c^2$. $(x-ct)^3$ ist ebenfalls Lösung - die beiden Ableitungen verhalten sich analog:

$$\begin{aligned}
f(x+ct) &= (x+ct)^3 \\
f'(x+ct) &= 3(x+ct)^2 \cdot 1 \\
f''(x+ct) &= 3 \cdot 2 \cdot (x+ct) \cdot 1 = 6(x+ct) \\
\dot{f}(x+ct) &= 3(x+ct)^2 \cdot c \\
\ddot{f}(x+ct) &= 3 \cdot 2 \cdot c \cdot c(x+ct) = 6(x+ct)c^2
\end{aligned}$$