Musterlösung zur Klausur Mathematik 2 TMM20

M. Oettinger 6.2021

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 54, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(8 Punkte)
Die Tangente ist

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$f(x_0) = \frac{1^2}{-2} = -\frac{1}{2}$$

die erste Ableitung der Funktion

$$f'(x) = \frac{1(x-2) - (x+1) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2},$$
$$\Rightarrow f'(x_0 = 0) = \frac{-3}{(-2)^2} = -\frac{3}{4}$$

Damit ist die Tangentengleichung

$$t(x) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}(x - 0) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x$$

Die Tangente entspricht dem MacLaurin-Polynom $T_1(x)$.

Aufgabe 2

(12 Punkte)
Alle gegebenen Funktionen sind ableitbar.

a) differenzierbar, weil Quotient von Polynomen ohne Nullstelle im Nenner

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-4}{2x^2+1}; \qquad x \in \mathbb{R} \\ f'(x) &= \frac{2x(2x^2+1)-(x^2-4)4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{4x^3+2x-4x^3+16x}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{18x}{(2x^2+1)^2} \end{aligned}$$

b) differenzierbar, Verkettung differenzierbarer Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\cos(x^2+3) \\ f'(x) &= 3(-\sin(x^2+3)) \cdot 2x = -6x\sin(x^2+3) \end{aligned}$$

c) differenzierbar, Verkettung differenzierbarer Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{12\cdot\sin(x)} \\ f'(x) &= e^{12\cdot\sin(x)} \cdot 12 \cdot \cos(x) = 12\cos(x) \cdot e^{12\cdot\sin(x)} \end{aligned}$$

d) differenzierbar, Verkettung differenzierbarer Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sqrt{x^2+3}\right)^5 = \left(x^2+3\right)^{\frac{5}{2}} \\ f'(x) &= \frac{5}{2}\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 2x = 5x\left(\sqrt{x^2+3}\right)^3 \end{aligned}$$

e) differenzierbar, weil Quotient von Polynomen ohne Nullstelle im Nenner

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x^2+3}; \qquad x \in \mathbb{R} \\ f'(x) &= \frac{(x^2+3)-x\cdot 2x}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{x^2-2x^2+3}{(x^2+3)^2} = \frac{3-x^2}{(x^2+3)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(5 Punkte) Der Umfang des Rechtecks ist

$$U = 2(a+b) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{U}{2} - b$$

Die Fläche des Rechtecks ist eine Funktion der Variablen b

$$A = a \cdot b = \left(\frac{U}{2} - b\right) b = A(b)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{db} A(b) &= \frac{U}{2} - 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{U}{4} \\
\Rightarrow a &= \frac{U}{2} - b = \frac{U}{4} \\
\frac{d^2}{db^2} A(b) &= -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum!}
\end{aligned}$$

Die Lösung ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $U/4$. Die Rechnung für die kleinste Fläche funktioniert nicht, da der kleinste Flächenwert (für $b = 0$) am Rand des Definitionsbereichs der Funktion $A(b)$ liegt - der niedrigste Wert wird nicht als Minimum erkannt, da die Funktion auch für negative b Werte liefert (die allerdings nicht sinnvoll als Maß für die Fläche des Rechtecks sind).

Aufgabe 4

(19 Punkte)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot \frac{x^2 - 4}{2} = \frac{x^3 - 4x}{2} \\
f'(x) &= \frac{3x^2 - 4}{2} \\
f''(x) &= \frac{6x}{2} = 3x \\
f^{(3)}(x) &= 3
\end{aligned}$$

Es handelt sich um eine eindeutige Zuordnung - es ist eine Funktion.

Symmetrie der Funktion:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 4(-x)}{2} = -\frac{x^3 - 4x}{2} = -f(x),$$

die Funktion ist ungerade (punksymmetrisch zum Ursprung). Sie hat keine Lücken oder Pole, der Definitionsbereich und der Wertebereich ist ganz $\mathbb{R}$.

Verhalten für große und kleine Variablenwerte:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \to \pm\infty} x^3 - 4x = \pm\infty.$$

Nullstellen: $f(x)$ wird Null, wenn der Zähler Null wird,

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0$$
$$x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow x_{2/3} = \pm 2$$

Extrema: Nullsetzen der ersten Ableitung liefert

$$3x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{4/5} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$f(\frac{2}{\sqrt{3}}) = -\frac{8}{3\sqrt{3}}$$
$$f(-\frac{2}{\sqrt{3}}) = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$
$$f''(\frac{2}{\sqrt{3}}) = 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} > 0$$
$$f''(-\frac{2}{\sqrt{3}}) = 3 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -2\sqrt{3} < 0$$

Die Funktion hat ein Maximum bei $(-\frac{2}{\sqrt{3}}/\frac{8}{3\sqrt{3}})$ und ein Minimum bei $(\frac{2}{\sqrt{3}}/-\frac{8}{3\sqrt{3}})$.

Wendestellen und Krümmung: Nullsetzen der zweiten Ableitung

$$f''(x) = \frac{6x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_6 = 0$$
$$f^{(3)}(0) = 3 > 0$$

Die Funktion hat eine Wendestelle bei $(0/0)$, unterhalb der Wendestelle (z.B. bei $x = -1$) ist

$$f''(-1) = 3(-1) < 0,$$

sie ist also rechtsgekrümmt und ändert ihr Krümmungsverhalten an der Wendestelle (linksgekrümmt für $x > 0$).

Stetigkeit: bei der Funktion handelt es sich um ein Polynom

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x}{2} = \frac{1}{2} \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 0,$$

Polynome sind als normale Funktionen immer stetig.

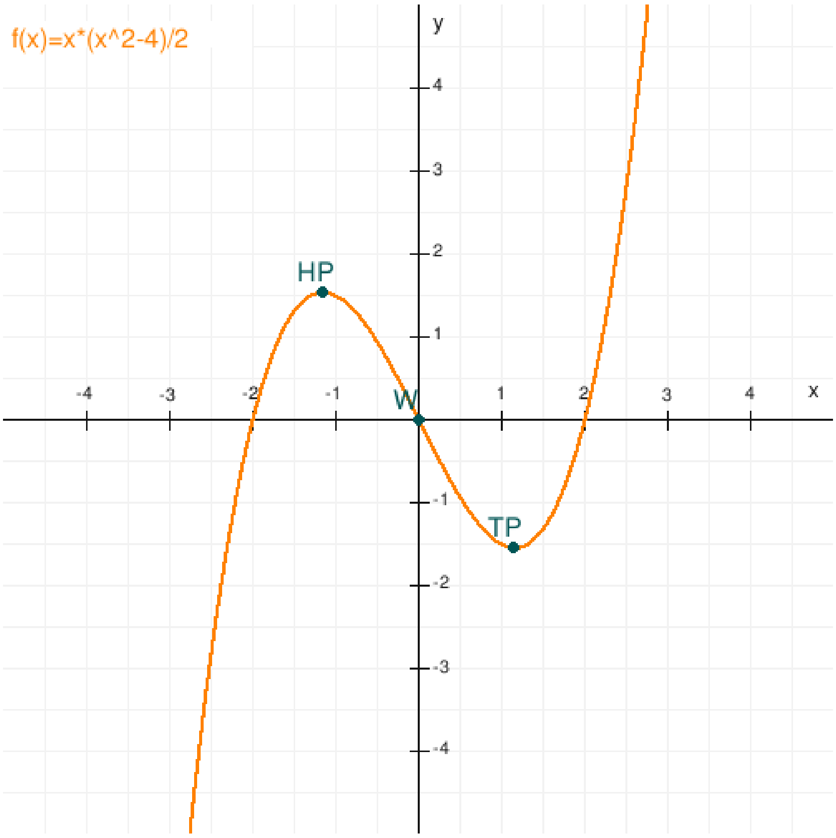

Abbildung 1: Skizze der Funktion $f(x)$

Aufgabe 5

(10 Punkte)
Die Scheinwerfer blenden, wenn sie direkt auf Alice gerichtet sind - die Tangente an die Kurve muss also durch den Punkt A gehen. Für dieTangentengleichung wird die erste Ableitung benötigt:

$$k(x) = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{7}{2}$$
$$k'(x) = -x + 1$$

Die Tangentengleichung an die Kurve in x_0 ist

$$\begin{aligned}
t(x) &= k(x_0) + k'(x_0)(x - x_0) \\
&= -\frac{x_0^2}{2} + x_0 + \frac{7}{2} + (-x_0 + 1)(x - x_0) \\
&= \frac{x_0^2}{2} - x_0 x + x + \frac{7}{2} \quad \text{mit} \\
t(1) &= \frac{x_0^2}{2} - x_0 + 1 + \frac{7}{2} = \frac{x_0^2}{2} - x_0 + \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \\
0 &= x_0 \left(\frac{x_0}{2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind die beiden Stellen, an denen die Tangente an die Kurve durch den Punkt gehen: $x_0 = 0$ und $x_0 = 2$.

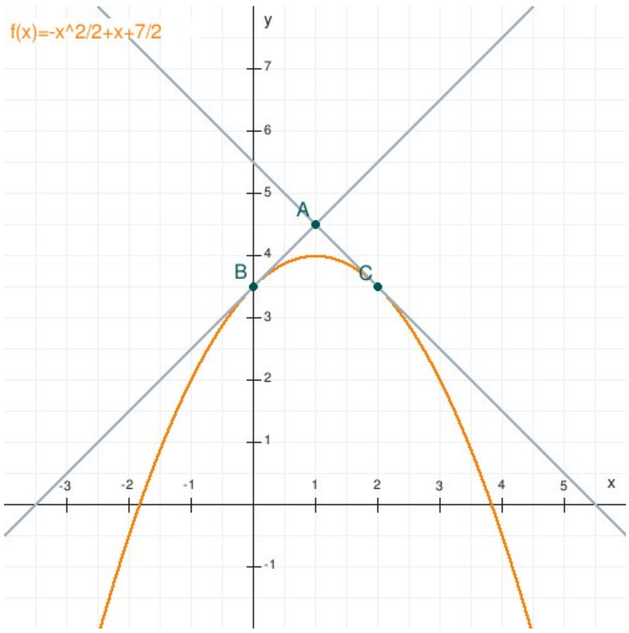

Abbildung 2: Bob und Charlie fahren Kurven