Lösung Übungsklausur Mathematik II

TMM20

Aufgabe 1

(8 Punkte)
Die Funktion $P(x)$ beschreibt den Wert des Produkts aus Vorgänger und Nachfolger der Zahl x:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)\cdot(x+1) = x^2 - 1 \\ P'(x) &= 2x \\ P''(x) &= 2 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Minumums wird die erste Ableitung Null gesetzt:

$$\begin{aligned} 2x = 0 &\Leftrightarrow x_0 = 0 \\ P''(x_0) = 2 > 0 &\quad\Rightarrow\quad \text{Minimum} \end{aligned}$$

Die Form der Kurve lässt sich dem Ausdruck $P(x) = x^2 - 1$ direkt entnehmen - es handelt sich um eine um den Betrag 1 nach unten verschobene Normalparabel, die nur für $x \in \mathbb{Z}$ definiert ist.

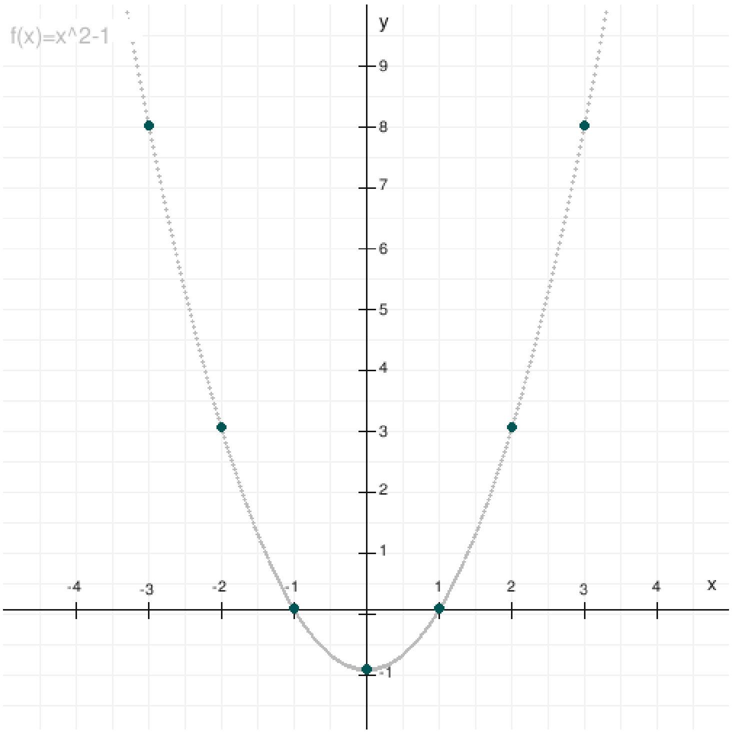

Abbildung 1: Die Funktion $P(x) = (x-1)(x+1)$. Das Minimum liegt bei x_0 = 0.

Aufgabe 2

$$
\begin{aligned}
K(v) &= \frac{a^2 v}{v^2+b^2}, v > 0 \\
\Rightarrow K'(v) &= \frac{a^2(v^2+b^2) - a^2 v 2v}{(v^2+b^2)^2} \\
&= \frac{a^2v^2 + a^2b^2 - 2a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} \\
&= \frac{a^2b^2 - a^2v^2}{(v^2+b^2)^2}
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung des Maximums wird die erste Ableitung Null gesetzt:

$$
\begin{aligned}
K'(v) = \frac{a^2b^2 - a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} = 0 \Leftrightarrow a^2b^2 - a^2v^2 = 0 \\
\Leftrightarrow v^2 = b^2 \\
\Leftrightarrow v_{1/2} = \pm b
\end{aligned}
$$

Die zweite Ableitung lautet

$$
\begin{aligned}
K''(v) &= \frac{-2a^2v(v^2+b^2)^2 - (a^2b^2 - a^2v^2)2(v^2+b^2)2v}{(v^2+b^2)^4} \\
&= \frac{-2a^2v(v^2+b^2) - 4v(a^2b^2 - a^2v^2)}{(v^2+b^2)^3} \\
&= \frac{-2a^2v^3 - 2a^2b^2v - 4a^2b^2v + 4a^2v^3}{(v^2+b^2)^3} \\
&= \frac{2a^2v^3 - 6a^2b^2v}{(v^2+b^2)^3} \\
K''(b) &= \frac{2a^2b^3 - 6ba^2b^2}{(2b^2)^3} = \frac{-4a^2b^3}{8b^6} < 0 \text{ für b>0} \\
K''(-b) &= \frac{2a^2(-b)^3 - 6ba^2(-b)^2}{(2(-b)^2)^3} = \frac{4a^2b^3}{8b^6} \\
K(\pm b) &= \frac{a^2(\pm b)}{2b^2} = \pm\frac{a^2}{2b} > 0 \text{ für b>0}
\end{aligned}
$$

Weil $v > 0$, ist die positive Lösung der Wurzel

$$v = +\sqrt{b^2}$$

korrekt. Die negative Lösung bedeutet hier einfach eine Geschwindigkeit in die Gegenrichtung und der größte Wert ist natürlich

$$K(b) = \frac{a^2b}{2b^2} = \frac{a^2}{2b}$$

Aufgabe 3

Ableitungen von

a)

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}; \quad x \neq 0:$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

(differenzierbar, weil Quotient zweier Polynome, die Nullstelle des Nenners ist ausgeklammert)

b)

$$f(x) = \frac{x^2+x}{2x-x^2}; \quad x \in \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{x^2+x}{2x-x^2} = \frac{x(x+1)}{x(2-x)} = \frac{x+1}{2-x}$$

ist in $x_0 = 2$ nicht differenzierbar, für $x \neq 2$ ist

$$f'(x) = \frac{1\cdot(2-x)-(x+1)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+x+1}{(2-x)^2} = \frac{3}{(2-x)^2}$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(\sqrt{4x}):$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{4x}) \cdot \frac{1}{2}(4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{\cos\sqrt{4x}}{\sqrt{4x}}$$

(differenzierbar, da Wurzelfunktion)

d)

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x); quad x > 0$$
$$f'(x) = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} = x(2\ln(x)+1)$$

(differenzierbar, da Produkt differenzierbarer Funktionen)

Aufgabe 4

Entwicklung der Funktion $f(x) = \sin(x)$ um die Entwicklungsstelle $x_0 = \pi$ in eine Potenzreihe:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) &&\Rightarrow f(x_0 = \pi) = \sin(\pi) = 0 \\
f'(x) &= -\cos(x) &&\Rightarrow f'(x_0 = \pi) = -\cos(\pi) = -1 \\
f''(x) &= -\sin(x) &&\Rightarrow f''(x_0 = \pi) = -\sin(\pi) = 0 \\
f^{(3)}(x) &= \cos(x) &&\Rightarrow f^{(3)}(x_0 = \pi) = \cos(\pi) = 1
\end{aligned}$$

Ab der vierten Ableitung wiederholen sich die Ableitungen, es ist $f^{(n)}(x_0 = \pi) = \pm 1$ für gerade n, die ungeraden Ableitungen sind 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{0}{0!} + \frac{-1}{1!}(x-\pi) + \frac{0}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(x-\pi)^{2k+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Nullsetzen der ersten Ableitung liefert

$$f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}x,$$

einsetzen der Stelle $x = 2$:

$$a = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

Setzt man die Werte für x und a in die zweite Ableitung ein, so ergibt sich

$$f''(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2x + 2a = -3x + 2a = -6 + 2\frac{3}{2} = -3 < 0,$$

es handelt sich also um ein Maximum.

b) Die Steigung ergibt sich aus der ersten Ableitung

$$\begin{aligned}
f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax &= \frac{4}{3} \\
\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{4}{3} &= 0 \\
\Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}3x + \frac{2}{3}\frac{4}{3} &= 0 \\
x_{1/2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{2} - \frac{8}{9}} &= 1 \pm \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Die Tangentengleichungen in den Stellen $x_{1/2}$ an die Kurve ergeben sich nach

$$t_{1/2}(x) = f(x_{1/2}) + f'(x_{1/2}) \cdot (x - x_{1/2}) :$$
$$t_1(x) = f(\frac{4}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) = 8,52 + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3})$$
$$t_2(x) = f(\frac{2}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3}) = 2,81 + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3})$$

c) $f(x)$ ist Polynom vom Grad 3 mit negativem Koeffizient an der höchsten Potenz, also gilt
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm(-1)\infty$$

d) Die Funktion hat eine zweite Extremstelle bei $x = 0$, es ist
$$f''(0) = 2a > 0$$
also hat f(x) ein Minimum bei $(0; f(0) = 2)$ (Sie hat eine reelle Nullstelle, die schwer zu berechnen ist bei 3,36).

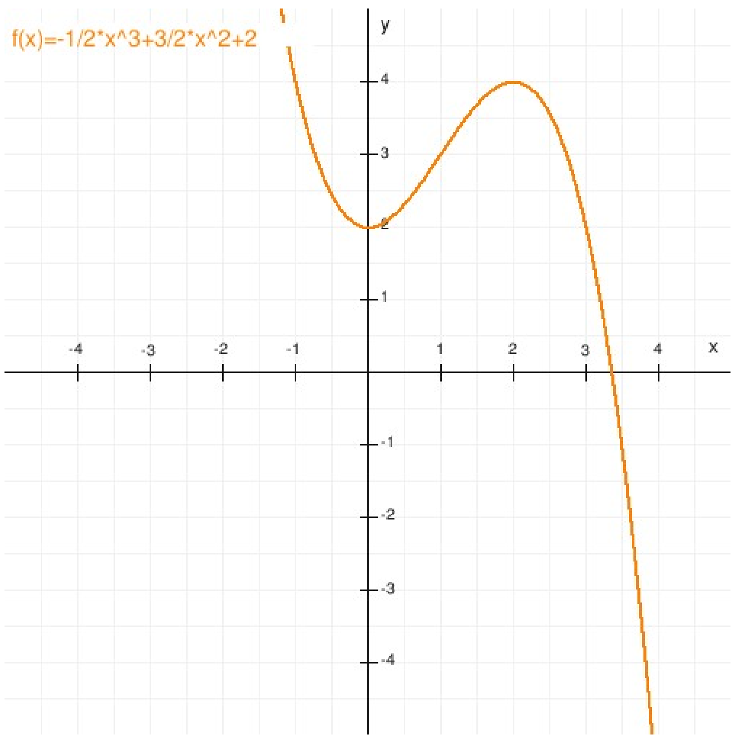

Abbildung 2: die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 2$ im Intervall $[-5; 5]$.

Aufgabe 6

Nullstellen:

$$\begin{aligned}
f(x) = e^x(x^2 - 5x + 5) &= 0 \\
x^2 - 5x + 5 &= 0 \\
x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} + 5 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 &= 0 \\
\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} - \frac{20}{4} = \frac{5}{4} \\
\Rightarrow x_{1,2} &= \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Extrema:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^x(x^2 - 5x + 5) + e^x(2x - 5) = e^x(x^2 - 3x) = 0 \\
x^2 - 3x &= 0 \\
x_3 &= 0 \; ; \;\; x_4 = 3 \\
f(0) &= 5 \; ; \;\; f(3) = -e^3. \\
f''(x) &= e^x(x^2 - 3x) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 3) \\
f''(0) &= -3 < 0 \; ; \;\; f''(3) = 3e^3 > 0
\end{aligned}$$

Die Funktion hat also ein (lokales) Maximum in $(0/5)$ und ein (lokales) Minimum in $(3/-e^3)$.
Wendepunkte:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= e^x(x^2 - 3x) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 3) = 0 \\
x^2 - x - 3 &= 0 \\
\Rightarrow x_{5,6} &= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \\
f(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}) &\approx -12,11 \\
f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}) &\approx 3,59
\end{aligned}$$

Die Wendepunkte sind $(2,30/-12,11)$ und $(-1,30/3,59)$. $f''(0) = e^0(0 - 0 - 3) = -3 < 0$, die Funktion ist also zwischen den Wendepunkt rechtsgekrümmt.

Asymptoten: das Polynom hat keine Polstellen, Verhalten für $x \to \pm\infty$ (für negative Werte wird zweimal die Regel von de L'Hospital benutzt):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} e^x(x^2-5x+5) &= \lim_{x\to\infty} e^x \cdot \lim_{x\to\infty}(x^2-5x+5) = +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2-5x+5) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(-x)^2+5x+5}{e^x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0+
\end{aligned}$$

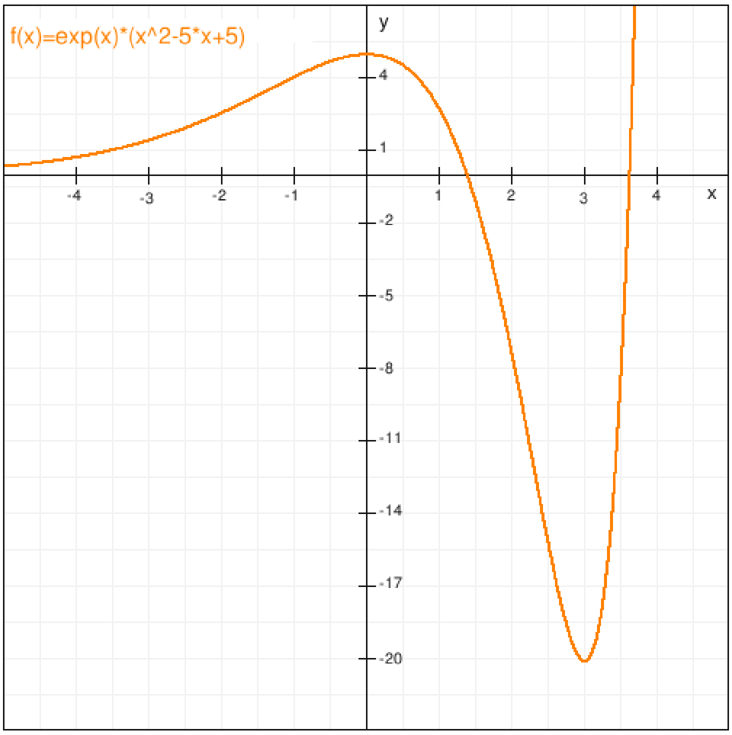

Abbildung 3: die Funktion $f(x) = e^x(x^2-5x+5)$ im Intervall $[-5; 5]$.