Musterlösung zur Klausur Mathematik 3 TMM21

M. Oettinger 2022

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 54, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(6 Punkte)
Doppelintegral des halben Kreisringes (in Polarkoordinaten, weil es sich um einen Bereich mit Rotationssymmetrie handelt) (6 Punkte):

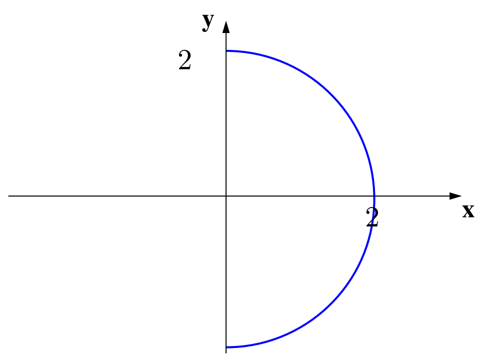

Abbildung 1: Skizze des Bereichs (A)

$$(A): \qquad x \geq 0;\ 0 \leq x^2 + y^2 < 4.$$

$$\iint\limits_{(A)} x dA = \int\limits_{r=0}^{2} \int\limits_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} r \cdot \cos(\varphi) r dr d\varphi = [\sin(\varphi)]_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 r^2 dr$$

$$= (1 - (-1)) \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

Aufgabe 2

(10 Punkte) Berechnung von Integralen:

a) Nutzt man aus, dass $\cos(-x) = \cos(x)$:

$$\int_0^\pi (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx = \int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx$$

und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, so folgt

$$\int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx = \int_0^\pi 1 dx = [x]_0^\pi = \pi$$

b)

$$\int_0^\pi x \cos(2x) dx$$

partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \cos(2x) dx &= \left[x \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot \frac{\sin(2x)}{2} dx \\ &= 0 - 0 - \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{4}(\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0\end{aligned}$$

c)

$$\int x e^{-x^2} dx$$

kann direkt durch die Substitution $u = -x^2$ gelöst werden:

$$\begin{aligned}\frac{du(x)}{dx} &= -2x \qquad \Leftrightarrow \qquad dx = -\frac{du}{2x} \\ \int x e^{-x^2} dx &= -\int x e^u \frac{du}{2x} = -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(7 Punkte)

(a)

$$y' + 2y = e^{2y} \qquad (1)$$
$$y'' - y + 3x = x \qquad (2)$$
$$y'' - y + 3x = x; \qquad y(0) = -127$$

Gleichung (1) ist eine nichtlineare, homogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.
Gleichung (2) ist eine lineare, inhomogene und gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung.

(b) Die allgemeine Lösung der DGL (1) enthält (DGL 1. Ordnung) einen freien Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(c) Die allgemeine Lösung der DGL (2) enthält (DGL 2. Ordnung) zwei freie Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(d) Durch die Randbedingung wird einer der beiden freien Parameter festgelegt, es bleiben noch immer unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 4

(6 Punkte)

$$y' - 2x \cdot y = 7x$$

ist eine gewöhnliche, lineare und inhomogene DGL 1. Ordnung. Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$\begin{aligned}
y_h' - 2x \cdot y_h &= 0 \\
\frac{dy_h}{dx} &= 2x \cdot y_h \qquad \Leftrightarrow \qquad \int \frac{dy_h}{y_h} = \int 2x \cdot dx \\
\ln|y_h| &= 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + \ln|C| = x^2 + \ln|C| \\
y_h(x) &= C \cdot e^{x^2}
\end{aligned}$$

Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten: Ansatz ist

$$y(x) = C(x) \cdot e^{x^2}; \qquad y'(x) = C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe$$

in DGL

$$C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} - C(x)2xe^{x^2} = C'(x)e^{x^2} = 7x$$

$$\int C'(x)dx = C(x) = \int 7xe^{-x^2}dx$$

Das Integral kann direkt durch die Substitution $u = -x^2$ gelöst werden:

$$\frac{du(x)}{dx} = -2x \qquad \Leftrightarrow \; qquaddx = -\frac{du}{2x}$$

$$C(x) = \int 7xe^{-x^2}dx = -7\int xe^u \frac{du}{2x} = -\frac{7}{2}\int e^u du = -\frac{7}{2}e^u + C$$

$$= -\frac{7}{2}e^{-x^2} + C$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also

$$y(x) = C(x) \cdot e^{x^2} = \left(-\frac{7}{2}e^{-x^2} + C\right)e^{x^2} = -\frac{7}{2} + C \cdot e^{x^2}$$

Aufgabe 5

Differentialgleichung (6 Punkte)

(a) Lineare homogene Differentialgleichung 2.Ordnung

(b)

$$x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \qquad x > 0$$

$f(x) = x \ln x$, $(x > 0)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt.

$$y = x \ln x \Longrightarrow y' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 \Longrightarrow y'' = \frac{1}{x}$$

eingesetzt in die Differentialgleichung:

$$x^2 \cdot \frac{1}{x} - x(\ln x + 1) + x \ln x = 0$$

(c)

$$f(x) = -\frac{1}{x}, f'(x) = \frac{1}{x^2}, f''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

einsetzen in die Gleichung liefert

$$-x^2\frac{2}{x^3} - x\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \neq 0$$

$f(x)$ ist keine Lösung.

Aufgabe 6

Bestimmung des Fourier-Koeffizienten b_2 für die 2π-periodische Sägezahnfunktion $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $0 \leq x < 2\pi$ mit periodischer Fortsetzung (10 Punkte):

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(2x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin(2x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi}{2}\sin(2x)dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{x}{2}\sin(2x)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\sin(2x)dx = 0 - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\sin(2x)dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left[x\frac{(-\cos(2x))}{2}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(-\cos(2x))}{2}dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left[x\frac{(-\cos(2x))}{2}\right]_0^{2\pi} - 0 = \frac{1}{2\pi}2\pi\frac{\cos(4\pi)}{2} = \frac{\cos(4\pi)}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

(9 Punkte)

a) Es handelt sich um eine separable DGL:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}N(t) + \lambda N(t) &= 0 \\
\frac{d}{dt}N(t) &= -\lambda N(t) \\
\frac{dN(t)}{N(t)} &= -\lambda dt \\
\ln(|N(t)|) &= -\lambda t + \ln(|C|) \\
N(t) &= C \cdot e^{-\lambda t} \\
N(0) = N_0 \Rightarrow N(t) &= N_0 \cdot e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

b) Mit der Laplace-Transformierten der Funktion

$$\mathcal{L}\{N(t)\} = F(s)$$

und der 1. Ableitung

$$\mathcal{L}\{\dot{N}(t)\} = s\mathcal{L}\{N(t)\} - N(0)$$

und der Randbedingung $N(0) = N_0$ lässt sich die DGL wie folgt transformieren:

$$\begin{aligned}
sF(s) - N_0 + \lambda F(s) &= 0 \\
\Rightarrow F(s) &= \frac{N_0}{s+\lambda} \\
N(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = N_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+\lambda}\} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$