Musterlösung zur Nachklausur Mathematik 2 TMM19

M. Oettinger 9.2020

Zeit: 90Min.

Aufgabe 1

(6 Punkte)
Der Querschnitt des Rohres ist

$$A = a \cdot b \;\Rightarrow\; b = \frac{A}{a},$$

bei fester Wandstärke ist der Materialverbrauch proportional zum Umfang

$$U = 2(a+b) == 2\left(a + \frac{A}{a}\right) = U(a)$$

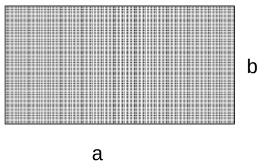

Abbildung 1: Rechteck mit Fläche $a \cdot b$ und Umfang $2(a+b)$

Der Umfang kann als Funktion der Seitenlänge a gesehen werden, den minimalen Wert des Umfang findet man durch Ableiten:

$$U'(a) = 2\left(1 - \frac{A}{a^2}\right) = 0$$
$$2a^2 = 2A \;\Rightarrow\; a = \pm\sqrt{A}$$
$$b = \frac{A}{a} = \pm\sqrt{A}$$
$$U''(a) = 2\left(0 - (-2)\frac{A}{a^3}\right)$$
$$U''(\sqrt{A}) = 4\frac{A}{\sqrt{A}^3} = \frac{4}{\sqrt{A}} > 0$$

Es handelt sich also um ein Minimum. Die negative Lösung beschreibt die zweite Möglichkeit der Messung von Längen, die Gegenrichtung.

Aufgabe 2

(10 Punkte)
Alle gegebenen Funktionen sind ableitbar.

a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2+2}{x^2+2x+1} \\
f'(x) &= \frac{2x(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2)}{(x+1)^4} \\
&= \frac{(x+1)[2x(x+1) - 2(x^2+2)]}{(x+1)\cdot(x+1)^3} \\
&= \frac{2x^2+2x-2x^2-4}{(x+1)^3} \\
&= \frac{2x-4}{(x+1)^3}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= 12e^x \\
f'(x) &= 12\cdot(e^x)' = 12e^x
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{12x} \\
f'(x) &= e^{12x}\cdot 12 = 12e^{12x}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{12\cdot\sin(x)} \\
f'(x) &= e^{12\cdot\sin(x)}\cdot 12\cdot\cos(x) = 12\cos(x)\cdot e^{12\cdot\sin(x)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(16 Punkte)
Die benötigten Ableitungen lauten

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2}{x^2+1} \\
f'(x) &= \frac{2x\cdot(x^2+1) - x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \\
f''(x) &= \frac{2(x^2+1)^2 - 2x\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)-2x\cdot 4x}{(x^2+1)^3} \\
&= \frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3} \\
&\text{Nicht gefordet: dritte Ableitung} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{-12x(x^2+1)^3 - (2-6x^2)\cdot 3(x^2+1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^6} \\
&= \frac{-12x(x^2+1) - (2-6x^2)\cdot 3\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-12x^3-12x-12x+36x^3}{(x^2+1)^4} \\
&= \frac{24x^3-24x}{(x^2+1)^4} = 24x\frac{x^2-1}{(x^2+1)^4}
\end{aligned}
$$

$f(x)$ ist eine Funktion, da jedem Wert aus $\mathbb{R}$ genau ein Wert aus $\mathbb{R}^+$ zugeordnet wird. Bestimmung der Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{x^2}{x^2+2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 0 \\
x_1 = 0; x_2 = 0 \text{ (doppelte Nullstelle)}
\end{aligned}
$$

Extrema:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \;\Leftrightarrow\; x_E = 0 \\
f(0) = 0;\; f''(0) = \frac{2-0}{(0+1)^3} = 2 > 0 \Rightarrow \text{ Minimum bei } (0/0)
\end{aligned}
$$

Symmetrie:

$$
f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = f(x)
$$

Die Funktion ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse oder gerade.

Wendestellen und Krümmung:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3} = 0 \ \Leftrightarrow \ 2-6x^2 = 0 \\
x_{1/2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \\
f^{(3)}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) &= 24\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\frac{\frac{1}{3}-1}{(\frac{1}{3}+1)^4} = \pm\sqrt{3}\frac{27}{16} \neq 0 \Rightarrow \text{ Wendestellen.} \\
f''(x) &< 0 \text{ für } x < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{ rechtsgekrümmt}
\end{aligned}$$

Verhalten für große/kleine Variablenwerte:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1} \to \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1 \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1} \to \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1
\end{aligned}$$

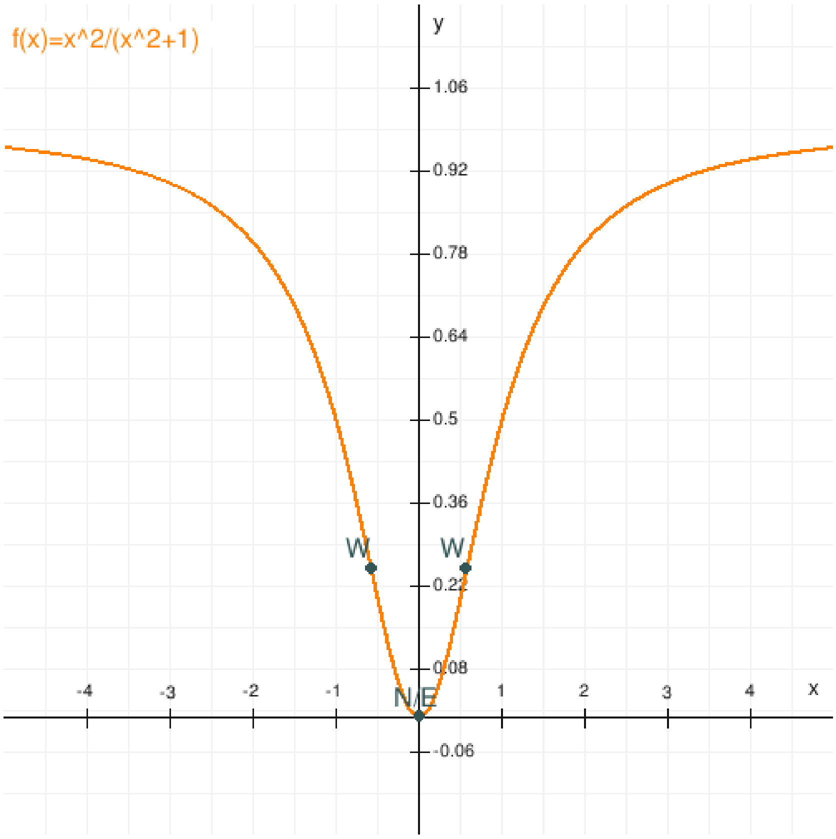

Abbildung 2: die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ im Intervall D.

Aufgabe 4

(6 Punkte)

a) Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3e^x - 3}{4\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3e^x}{4\cos(x)} = \frac{3}{4}$$

b) Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(x-1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1} = 2$$

Aufgabe 5

(9 Punkte)
Die Tangente ist

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

die erste Ableitung der Funktion

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\left(2x + 2e^{2x} - [1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)]\right) \\ f'(x_0) &= \frac{1}{3} \cdot 2e^{2 \cdot 0} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

mit

$$f(x_0) = \frac{1}{3} \cdot 2e^0 = \frac{1}{3}$$

folgt die Tangentengleichung

$$t(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot x.$$

Wegen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

ist die Tangentengleichung natürlich genau das MacLaurin-Polynom bis $n = 1$.

Aufgabe 6

(8 Punkte)
Berechnung der Ableitung von $f(x) = x^3$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \\ f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) \\ &= \lim_{h \to 0} 3x^2 = 3x^2 \end{aligned}$$