Lösung Übungsklausur Mathematik II

TMM21

Juni 2022

Aufgabe 1

$$\sqrt{2,1} = (2,1)^{1/2},$$

es liegt nahe, die Funktion

$$f(x) = \sqrt{2+x} = (2+x)^{1/2}$$

um die Stelle $x_0 = 0$ zu entwickeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2+x} \;\Rightarrow\; f(0) = \sqrt{2} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}\,(2+x)^{-1/2} \;\Rightarrow\; f'(0) = \frac{1}{2}\,(2)^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Also ist das Taylorpolynom

$$T_1(x) = f(0) + f'(0)\cdot x = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x$$

und die Funktion

$$\begin{aligned} f(x) &\approx T_1(x) \\ \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2}} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}}T_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x\right) \\ \frac{\sqrt{2,1}}{\sqrt{2}} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}}T_1(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0,1\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdot 0,1 = 1 + \frac{1}{40} = 1,025. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = e^x$: die Exponentialfunktion ist sicher beliebig oft differenzierbar, wir können sehr einfach alle Ableitungen angeben:

$$f(x) = e^x \text{ und damit } f^{(n)}(x) = e^x \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Für die Reihenentwicklung um den Nullpunkt benötigen wir die Ableitungen an der Stelle $x = 0$:

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Damit erhalten wir sofort die Potenzreihenentwicklung der e-Funktion

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Nicht gefragt: ihr Konvergenzradius ist

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

Die Reihe konvergiert beständig.

Aufgabe 3

Nach dem 2. Newtonschen Axiom ist $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t) = m \cdot \ddot{\vec{s}}(t)$. Da $\vec{s}(t)$ nur einen Beitrag in y-Richtung enthält, genügt es natürlich, diese Richtung zu betrachten:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{e}{m}t^2 \\ \dot{s}(t) &= v(t) = \frac{2e}{m}t \\ \ddot{s}(t) &= \dot{v}(t) = a(t) = \frac{2e}{m} \\ &\Rightarrow F(t) = m \cdot a(t) = m\frac{2e}{m} = 2e \end{aligned}$$

Oder wieder in Vektorschreibweise:

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
K(v) &= \frac{a^2v}{v^2+b^2}, v > 0 \\
\Rightarrow K'(v) &= \frac{a^2(v^2+b^2) - a^2v2v}{(v^2+b^2)^2} \\
&= \frac{a^2v^2 + a^2b^2 - 2a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} \\
&= \frac{a^2b^2 - a^2v^2}{(v^2+b^2)^2}
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Maximums wird die erste Ableitung Null gesetzt:

$$\begin{aligned}
K'(v) = \frac{a^2b^2 - a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} &= 0 \Leftrightarrow a^2b^2 - a^2v^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow v^2 = b^2 \\
&\Leftrightarrow v_{1/2} = \pm b
\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung lautet

$$\begin{aligned}
K''(v) &= \frac{-2a^2v(v^2+b^2)^2 - (a^2b^2 - a^2v^2)2(v^2+b^2)2v}{(v^2+b^2)^4} \\
&= \frac{-2a^2v(v^2+b^2) - 4v(a^2b^2 - a^2v^2)}{(v^2+b^2)^3} \\
&= \frac{-2a^2v^3 - 2a^2b^2v - 4a^2b^2v + 4a^2v^3}{(v^2+b^2)^3} \\
&= \frac{2a^2v^3 - 6a^2b^2v}{(v^2+b^2)^3} \\
K''(b) &= \frac{2a^2b^3 - 6ba^2b^2}{(2b^2)^3} = \frac{-4a^2b^3}{8b^6} < 0 \text{ für b>0} \\
K''(-b) &= \frac{2a^2(-b)^3 - 6ba^2(-b)^2}{(2(-b)^2)^3} = \frac{4a^2b^3}{8b^6} \\
K(\pm b) &= \frac{a^2(\pm b)}{2b^2} = \pm\frac{a^2}{2b} > 0 \text{ für b>0}
\end{aligned}$$

Weil $v > 0$, ist die positive Lösung der Wurzel

$$v = +\sqrt{b^2}$$

korrekt. Die negative Lösung bedeutet hier einfach eine Geschwindigkeit in die Gegenrichtung und der größte Wert ist natürlich

$$K(b) = \frac{a^2 b}{2b^2} = \frac{a^2}{2b}$$

Aufgabe 5

a) Nullsetzen der ersten Ableitung liefert

$$f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}x,$$

einsetzen der Stelle $x = 2$:

$$a = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

Setzt man die Werte für x und a in die zweite Ableitung ein, so ergibt sich

$$f''(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2x + 2a = -3x + 2a = -6 + 2\frac{3}{2} = -3 < 0,$$

es handelt sich also um ein Maximum.

b) Die Steigung ergibt sich aus der ersten Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{4}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}3x + \frac{2}{3}\frac{4}{3} &= 0 \\ x_{1/2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{2} - \frac{8}{9}} &= 1 \pm \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Die Tangentengleichungen in den Stellen $x_{1/2}$ an die Kurve ergeben sich nach

$$\begin{aligned} t_{1/2}(x) &= f(x_{1/2}) + f'(x_{1/2}) \cdot (x - x_{1/2}) : \\ t_1(x) = f(\frac{4}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) &= 8,52 + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) \\ t_2(x) = f(\frac{2}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3}) &= 2,81 + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3}) \end{aligned}$$

c) $f(x)$ ist Polynom vom Grad 3 mit negativem Koeffizient an der höchsten Potenz, also gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm(-1)\infty$$

d) Die Funktion hat eine zweite Extremstelle bei $x = 0$, es ist

$$f''(0) = 2a > 0$$

also hat f(x) ein Minimum bei $(0; f(0) = 2)$ (Sie hat eine reelle Nullstelle, die schwer zu berechnen ist bei 3,36).

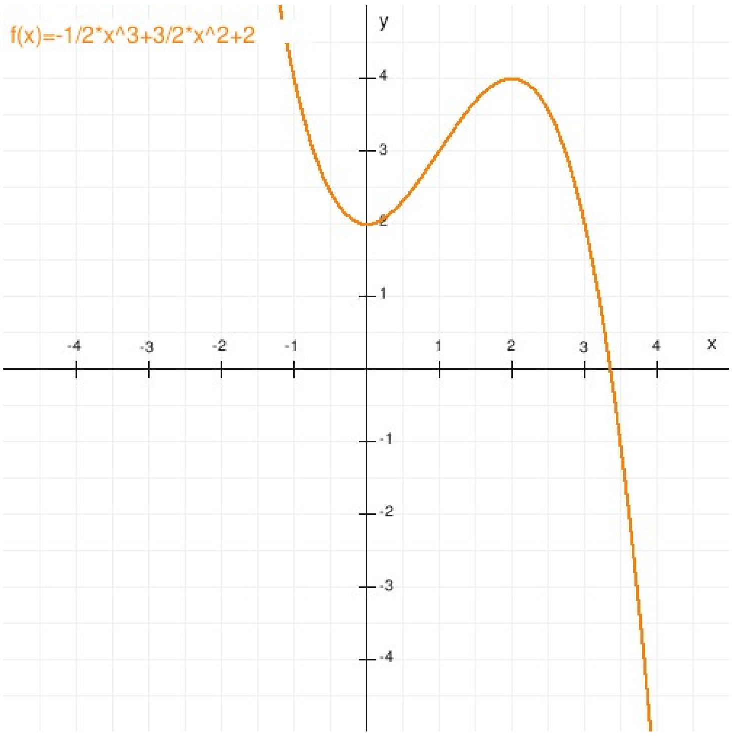

Abbildung 1: die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 2$ im Intervall $[-5; 5]$.

Aufgabe 6

Nullstellen:

$$\begin{aligned}
f(x) = e^x(x^2 - 5x + 5) &= 0 \\
x^2 - 5x + 5 &= 0 \\
x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} + 5 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 &= 0 \\
\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} - \frac{20}{4} = \frac{5}{4} \\
&\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Extrema:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^x(x^2 - 5x + 5) + e^x(2x - 5) = e^x(x^2 - 3x) = 0 \\
x^2 - 3x &= 0 \\
x_3 &= 0\ ;\ \ x_4 = 3 \\
f(0) &= 5\ ;\ \ f(3) = -e^3. \\
f''(x) &= e^x(x^2 - 3x) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 3) \\
f''(0) &= -3 < 0\ ;\ \ f''(3) = 3e^3 > 0
\end{aligned}$$

Die Funktion hat also ein (lokales) Maximum in $(0/5)$ und ein (lokales) Minimum in $(3/-e^3)$.
Wendepunkte:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= e^x(x^2 - 3x) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 3) = 0 \\
x^2 - x - 3 &= 0 \\
&\Rightarrow x_{5,6} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \\
f(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}) &\approx -12,11 \\
f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}) &\approx 3,59
\end{aligned}$$

Die Wendepunkte sind $(2,30/-12,11)$ und $(-1,30/3,59)$. $f''(0) = e^0(0 - 0 - 3) = -3 < 0$, die Funktion ist also zwischen den Wendepunkt rechtsgekrümmt.

Asymptoten: das Polynom hat keine Polstellen, Verhalten für $x \to \pm\infty$ (für negative Werte wird zweimal die Regel von de L'Hospital benutzt):

$$\lim_{x\to\infty} e^x(x^2-5x+5) = \lim_{x\to\infty} e^x \cdot \lim_{x\to\infty}(x^2-5x+5) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2-5x+5) = \lim_{x\to\infty} \frac{(-x)^2+5x+5}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0+$$

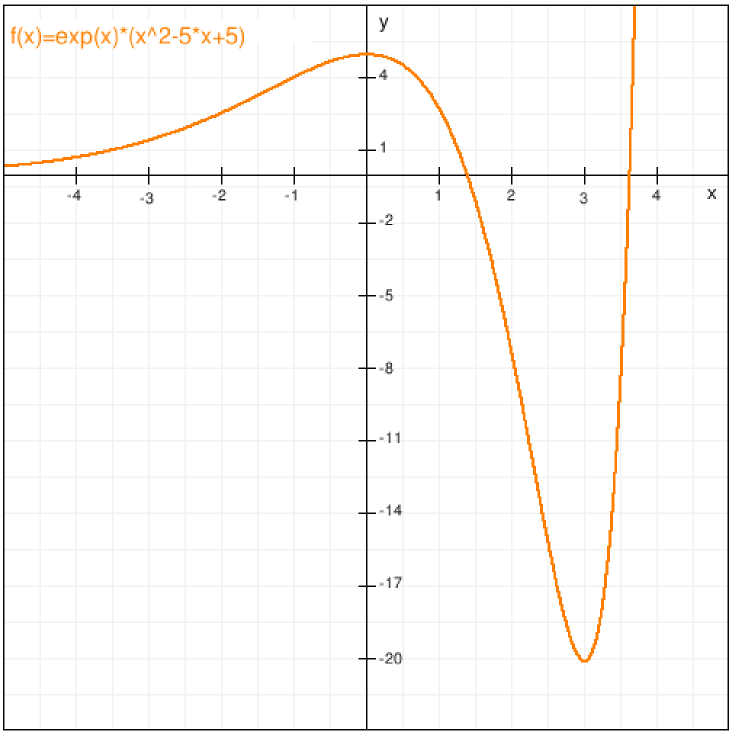

Abbildung 2: die Funktion $f(x) = e^x(x^2-5x+5)$ im Intervall $[-5;5]$.

Aufgabe 7

Ableitung von

a)

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}:$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2+x}{2x-x^2} = \frac{x(x+1)}{x(2-x)} = \frac{x+1}{2-x} :$$
$$f'(x) = \frac{1\cdot(2-x)-(x+1)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+x+1}{(2-x)^2} = \frac{3}{(2-x)^2}$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(\sqrt{4x}) :$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{4x})\cdot\frac{1}{2}(4x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4 = \frac{\cos\sqrt{4x}}{\sqrt{4x}}$$

d)

$$f(x) = x^2\cdot\ln(x) :$$
$$f'(x) = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} = x(2\ln(x)+1)$$

Aufgabe 8

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3+2x^2+1 && \Rightarrow f(1)=4\\
f'(x) &= 3x^2+4x && \Rightarrow f'(1)=7\\
f''(x) &= 6x+4 && \Rightarrow f''(1)=10\\
f^{(3)}(x) &= 6 && \Rightarrow f^{(3)}(1)=6\\
f^{(n)}(x) &= 0 \text{ für } n>3.
\end{aligned}$$

Taylor-Entwicklung:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

da ab der vierten Ableitung alle weiteren verschwinden, gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{3}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \frac{4}{0!}(x-1)^0 + \frac{7}{1!}(x-1)^1 + \frac{10}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3.$$

Unter Ausnutzen von $0! = 1$ folgt nach ausmultiplizieren

$$4 + 7(x-1) + 7(x-1) + \frac{10}{2}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3$$
$$= x^3 + 2x^2 + 1.$$

Die Taylorentwicklung ist mit der ursprünglichen analytischen Darstellung identisch (da die Ableitungen einer Potenzreihe wieder eine Potenzreihe ergeben und die Darstellung der Funktion eindeutig ist). Daraus folgt für den Konvergenzradius natürlich, dass er dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ der Funktion entspricht.