Musterlösung zur Übungsklausur Mathematik III TMM22

12.2023

Aufgabe 1

(a) $f(x) = 2x^2 \cdot e^x$:

$$\begin{aligned}\int 2x^2 \cdot e^x dx &= 2x^2 e^x - \int 4xe^x dx \\ &= 2x^2 e^x - \left[4xe^x - \int 4e^x dx\right] \\ &= 2x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x + C = (2x^2 - 4x + 4)e^x + C\end{aligned}$$

(b) $\int 4xe^{3x^2} dx$: Substitution $u(x) = 3x^2$, also

$$\frac{du(x)}{dx} = 6x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{du}{6x}$$

$$\int 4xe^{3x^2} dx = \int 4xe^u \frac{du}{6x} = \frac{2}{3} \int e^u du = \frac{2}{3} e^u + C$$

Rücksubstitution:

$$\int 4xe^{3x^2} dx = \frac{2}{3} e^{3x^2} + C$$

(c)

$$\int \cos^2(x)\cdot\tan(x)dx = \int \cos^2(x)\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \int \cos(x)\sin(x)dx$$
$$= \int u\cdot\cos(x)\frac{du}{\cos(x)} = \int udu = \frac{u^2}{2}+C$$

Rücksubstitution:

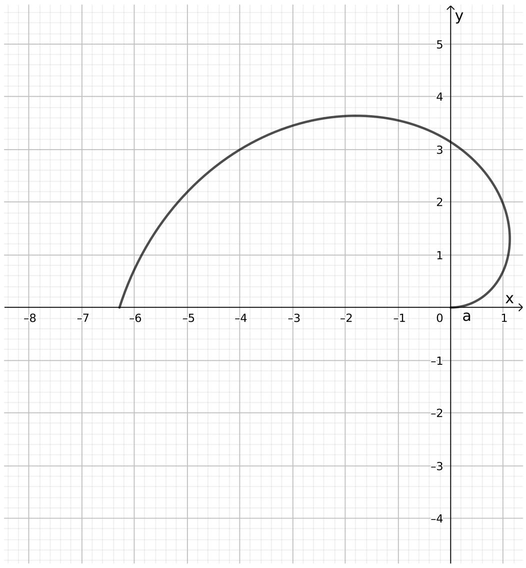
$$= \frac{\sin^2(x)}{2}+C$$

Aufgabe 2

Bei der durch

$$f: 0\leq\varphi\leq\pi \quad ; r = 2\cdot\varphi$$

gegebenen Figur handelt es sich um die erste halbe Umdrehung einer archimedeschen Spirale.



Berechnung der Fläche in Polarkoordinaten (Rotationssymmetrie!)

$$A = \iint dA = \int_{r=0}^{2\varphi}\int_{\varphi=0}^{\pi} r dr d\varphi$$
$$= \int_0^{\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi}\frac{4\varphi^2}{2}d\varphi$$
$$= 2\left[\frac{1}{3}\varphi^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^3$$

Aufgabe 3

Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + 2y(x) = e^{3x} + 5xe^{3x}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$

a) durch Aufsuchen einer partikulären Lösung: die zugehörige homogene DGL

$$y_0' + 2y_0 = 0$$

kann durch Separation gelöst werden:

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dx} &= -2y_0 \\ \int \frac{dy_0}{y_0} &= -2 \int dx \\ \ln|y_0| &= -2x + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad y_0(x) = Ce^{-2x} \end{aligned}$$

Ein geeigneter Ansatz für die partikuläre Lösung ist

$$\begin{aligned} y_p(x) &= (a + bx)e^{3x} \\ y_p'(x) &= be^{3x} + (a + bx)e^{3x} \cdot 3 \\ y_p'(x) + 2y_p(x) &= be^{3x} + 3(a + bx)e^{3x} + 2(a + bx)e^{3x} \\ &= (b + 5a)e^{3x} + 5bxe^{3x} = e^{3x} + 5xe^{3x} \\ &\Rightarrow \quad 5bxe^{3x} = 5xe^{3x} \quad \Rightarrow \quad b = 1 \\ &\Rightarrow \quad (b + 5a)e^{3x} = 1 \cdot e^{3x} \quad \Rightarrow \quad a = 0 \\ y_p(x) &= (a + bx)e^{3x} = (0 + 1 \cdot x)e^{3x} = xe^{3x} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + y_p = Ce^{-2x} + xe^{3x}, \\ \text{mit } y(0) &= C \cdot 1 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \\ &\Rightarrow y(x) = xe^{3x} \end{aligned}$$

b) über die Laplace-Transformation (mit $y(0) = 0$) und

$$e^{ax} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}; \qquad xe^{ax} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s-a)^2}$$

kann die DGL transformiert werden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'(x)\} + 2\mathcal{L}\{y(x)\} &= \mathcal{L}\{e^{3x}\} + 5\mathcal{L}\{xe^{3x}\} \\
sY(s) - y(0) + 2Y(s) &= \frac{1}{s-3} + 5 \cdot \frac{1}{(s-3)^2} = \frac{s-3+5}{(s-3)^2} \\
Y(s)(s+2) &= \frac{1}{(s-3)^2}(s+2) \\
Y(s) &= \frac{1}{(s-3)^2}
\end{aligned}$$

Die Lösung lässt sich durch Rücktransformation mit Hilfe der Korrespondenz $xe^{ax} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s-a)^2}$ jetzt sofort angeben

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = xe^{3x}$$

Aufgabe 4

Ausschreiben der Fourierreihe liefert die Lösung über einen einfachen Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \\
3\lambda &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(nx) + \dots \\
&\Rightarrow 3\lambda = \frac{a_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 6\lambda \\
&\Rightarrow a_n = 0 \ \ \forall n > 0; \quad b_n = 0.
\end{aligned}$$

Alternativ findet man die Koeffizienten über die Integrationen

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = 3\lambda\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx = 3\lambda\frac{2\pi}{\pi} = 6\lambda \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 3\lambda\cos(nx)dx = \frac{3\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nx)dx = 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 3\lambda\sin(nx)dx = \frac{3\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nx)dx = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y'(x) + 3xy(x) = 3x,$$

eine lineare, inhomogene und gewöhnliche DGL 1. Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten:

i) Über die Trennung der Variablen: Umstellen der DGL liefert

$$\begin{aligned} y'(x) + 3x(y(x) - 1) = 0 \quad & \text{Separable DGL} \\ \frac{dy}{dx} &= -3x(y-1) \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{y-1} = -3\int x dx \\ \ln|y-1| &= -\frac{3}{2}x^2 + \ln|C| \\ y(x) - 1 &= Ce^{-3/2x^2} \\ y(x) &= 1 + Ce^{-3/2x^2} \end{aligned}$$

ii) Über Variation der Konstanten: die zugehörige homogene DGL ist

$$y_0'(x) + 3xy_0(x) = 0$$

Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{dy_0'(x)}{dx} &= -3xdx \quad \Leftrightarrow \int \frac{dy_0}{y_0} \qquad = -3\int xdx \\ \ln|y_0| &= -\frac{3}{2}x^2 + \ln|C| \\ y_0(x) &= C \cdot e^{-3/2x^2} \end{aligned}$$

Variation der Konstanten zur Lösung der inhomogenen DGL:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= C(x)e^{-3/2x^2} \quad \text{als Ansatz}\\
y'(x) &= C'(x)e^{-3/2x^2} + C(x)\left(-\frac{3}{2}2x\right)e^{-3/2x^2} \quad \text{eingesetzt in die DGL}\\
y' + 3xy &= C'(x)e^{-3/2x^2} - 3xC(x)e^{-3/2x^2} + 3xC(x)e^{-3/2x^2} = 3x\\
C'(x) &= 3xe^{3/2x^2}\\
C(x) &= \int 3xe^{3/2x^2}dx \quad \text{, einfach lösbar durch Substitution}\\
u(x) &= \frac{3}{2}x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 3x\\
C(x) &= \int 3xe^{3/2x^2}dx = \int 3xe^u\frac{du}{3x}\\
&= \int e^u du = e^u + C. \quad \text{Rücksubstitution:}\\
C(x) &= e^{3/2x^2} + C \quad \text{und eingesetzt in den Ansatz:}\\
y(x) &= C(x)e^{-3/2x^2} = \left(e^{3/2x^2} + C)e^{-3/2x^2}\right)\\
y(x) &= 1 + Ce^{-3/2x^2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

Die Differentialgleichung

$$y' = a(1-y)y$$

ist eine nichtlineare, homogene, gewöhnliche DGL 1. Ordnung. Ihre allgemeine Lösung kann durch Separation der Variablen gefunden werden:

$$y' = a(1-y)y$$

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot (1-y)y \quad \Leftrightarrow \int \frac{dy}{(1-y)y} = \int a dx$$

mit Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{dy}{(1-y)y} = \int \frac{1}{y} dy - \int \frac{1}{y-1} dy$$

$$= \ln|y| - \ln|y-1| = \ln\left|\frac{y}{y-1}\right| = \int a dx = ax + \ln|C|$$

$$\Rightarrow \frac{y}{y-1} = Ce^{ax}$$ aufgelöst nach $y(x)$

$$y(1 - Ce^{ax}) = -Ce^{ax}$$

$$y(C - e^{ax}) = -e^{ax}$$ (C ist Integratonskonstante!)

$$y(x) = \frac{e^{ax}}{e^{ax} + C}$$