Aufgabe 1

Wie dimensioniert man den rechteckigen Querschnitt $A = a \cdot b$ mit $a \geq 0; b \geq 0$ eines Rohres (mit fester Wandstärke!), wenn der Materialverbrauch (für die Wandung) möglichst gering, die Querschnittsfläche dabei aber möglichst groß sein soll (mit Berechnung)?

Was bedeutet die in der Berechnung auftretende negative Lösung?

Aufgabe 2

Welche der folgenden Funktionen lassen sich ableiten? Bestimmen Sie die erste Ableitung, sofern möglich.

a)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2x + 1}; \qquad x \geq 0$$

b)

$$f(x) = 12e^x$$

c)

$$f(x) = e^{12x}$$

d)

$$f(x) = e^{12 \cdot \sin(x)}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Relation

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Handelt es sich um eine Funktion? Untersuchen Sie $f(x)$ auf Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, eventuelle Symmetrie und Krümmungsverhalten (ohne dritte Ableitung - die Relation besitzt keine Sattelstellen). Wie verhält sich $f(x)$ für große und keine Variablenwerte?

Skizzieren Sie die Funktion in einem geeignet gewählten Intervall.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{3e^x - 3}{4\sin(x)}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(x-1)}{x}$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die durch die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + e^{2x} - x \cdot \sin(x)}{3}$$

gegebene Kurve an der Stelle $x_0 = 0$. Geben Sie das MacLaurinsche Polynom bis $n = 1$ an.

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3;\ x \in \mathbb{R}$ mit Hilfe des Differentialquotienten

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{d}{dx} f(x).$$