

Musterlösung zur Nachklausur Mathematik 2 TMM22

M. Oettinger 10.2023

Zeit: 90Min.

Aufgabe 1

(6 Punkte)

Der Querschnitt des Rohres ist

$$A = a \cdot b \Rightarrow b = \frac{A}{a},$$

bei fester Wandstärke ist der Materialverbrauch proportional zum Umfang

$$U = 2(a + b) == 2 \left(a + \frac{A}{a} \right) = U(a)$$

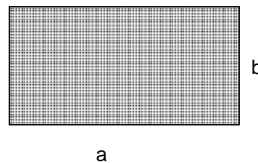


Abbildung 1: Rechteck mit Fläche $a \cdot b$ und Umfang $2(a + b)$

Der Umfang kann als Funktion der Seitenlänge a gesehen werden, den minimalen Wert des Umfang findet man durch Ableiten:

$$U'(a) = 2 \left(1 - \frac{A}{a^2} \right) = 0$$

$$2a^2 = 2A \Rightarrow a = \pm\sqrt{A}$$

$$b = \frac{A}{a} = \pm\sqrt{A}$$

$$U''(a) = 2 \left(0 - (-2) \frac{A}{a^3} \right)$$

$$U''(\sqrt{A}) = 4 \frac{A}{\sqrt{A}^3} = \frac{4}{\sqrt{A}} > 0$$

Es handelt sich also um ein Minimum. Die negative Lösung beschreibt die zweite Möglichkeit der Messung von Längen, die Gegenrichtung.

Aufgabe 2

(10 Punkte)

Alle gegebenen Funktionen sind ableitbar.

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 2}{x^2 + 2x + 1} \\ f'(x) &= \frac{2x(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(x+1)[2x(x+1) - 2(x^2+2)]}{(x+1) \cdot (x+1)^3} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - 2x^2 - 4}{(x+1)^3} \\ &= \frac{2x - 4}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= 12e^x \\ f'(x) &= 12 \cdot (e^x)' = 12e^x \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{12x} \\ f'(x) &= e^{12x} \cdot 12 = 12e^{12x} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{12 \cdot \sin(x)} \\ f'(x) &= e^{12 \cdot \sin(x)} \cdot 12 \cdot \cos(x) = 12 \cos(x) \cdot e^{12 \cdot \sin(x)} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(16 Punkte)

Die benötigten Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2}{x^2 + 1} \\f'(x) &= \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \\f''(x) &= \frac{2(x^2 + 1)^2 - 2x \cdot 2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 4x}{(x^2 + 1)^3} \\&= \frac{2x^2 + 2 - 8x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2 - 6x^2}{(x^2 + 1)^3}\end{aligned}$$

Nicht gefordert: dritte Ableitung

$$\begin{aligned}f^{(3)}(x) &= \frac{-12x(x^2 + 1)^3 - (2 - 6x^2) \cdot 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^6} \\&= \frac{-12x(x^2 + 1) - (2 - 6x^2) \cdot 3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-12x^3 - 12x - 12x + 36x^3}{(x^2 + 1)^4} \\&= \frac{24x^3 - 24x}{(x^2 + 1)^4} = 24x \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^4}\end{aligned}$$

$f(x)$ ist eine Funktion, da jedem Wert aus \mathbb{R} genau ein Wert aus \mathbb{R}^+ zugeordnet wird. Bestimmung der Nullstellen:

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2} = 0 &\Leftrightarrow x^2 = 0 \\x_1 = 0; x_2 = 0 &\text{ (doppelte Nullstelle)}\end{aligned}$$

Extrema:

$$\begin{aligned}f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} &\Leftrightarrow x_E = 0 \\f(0) = 0; f''(0) = \frac{2 - 0}{(0 + 1)^3} = 2 > 0 &\Rightarrow \text{Minimum bei } (0/0)\end{aligned}$$

Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1} = f(x)$$

Die Funktion ist spiegelsymmetrisch zur y -Achse oder gerade.

Wendestellen und Krümmung:

$$f''(x) = \frac{2 - 6x^2}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2 - 6x^2 = 0$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$f^{(3)}\left(\pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 24 \left(\pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \frac{\frac{1}{3} - 1}{\left(\frac{1}{3} + 1\right)^4} = \pm \sqrt{3} \frac{27}{16} \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestellen.}$$

$$f''(x) < 0 \text{ für } x < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{rechtsgekrümmt}$$

Verhalten für große/kleine Variablenwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

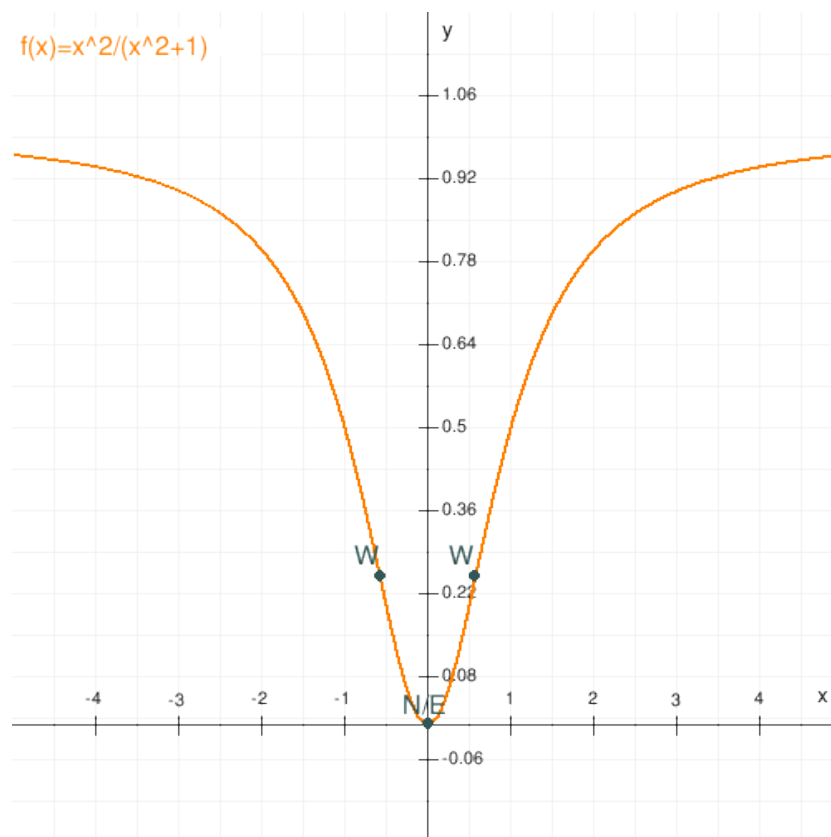


Abbildung 2: die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ im Intervall D .

Aufgabe 4

(6 Punkte)

a) Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x - 3}{4 \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x}{4 \cos(x)} = \frac{3}{4}$$

b) Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1} = 2$$

Aufgabe 5

(9 Punkte)

Die Tangente ist

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

die erste Ableitung der Funktion

$$f'(x) = \frac{1}{3} (2x + 2e^{2x} - [1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)])$$
$$f'(x_0) = \frac{1}{3} \cdot 2e^{2 \cdot 0} = \frac{2}{3},$$

mit

$$f(x_0) = \frac{1}{3} \cdot 2e^0 = \frac{1}{3}$$

folgt die Tangentengleichung

$$t(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot x.$$

Wegen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

ist die Tangentengleichung natürlich genau das MacLaurin-Polynom bis $n = 1$.

Aufgabe 6

(8 Punkte)

Berechnung der Ableitung von $f(x) = x^3$:

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2)$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 = 3x^2$$