Lösung Übungsklausur Mathematik II

TMM22

Juni 2023

Aufgabe 1

Es ist
$$\sqrt{\frac{28}{3}} = \sqrt{9 + \frac{1}{3}},$$
als Funktion für die Entwicklung empfiehlt sich also

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{9+x} = (9+x)^{1/2} & \Rightarrow \quad & f(0) = \sqrt{9} = 3 \\
f'(x) &= \frac{1}{2}\,(9+x)^{-1/2} & \Rightarrow \quad & f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(9+x)^{-3/2} & \Rightarrow \quad & f''(0) = -\frac{1}{4\sqrt{9}^3} = -\frac{1}{4\cdot 27} = -\frac{1}{108}
\end{aligned}$$

mit $f(x) = \sqrt{9+x}$ folgt also

$$\begin{aligned}
f(x) \approx T_2(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f(0)^{(k)}(0)}{k!} x \\
&= f(0) + f!(0)\cdot x + \frac{1}{2} f''(0)\cdot x^2 \\
&= 3 + \frac{x}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{108} \\
a &= \sqrt{\frac{28}{3}} = f(\frac{1}{3}) \\
&\approx 3 + \frac{1}{3\cdot 6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2\cdot 108} = 3,05504
\end{aligned}$$

Wert der Wurzel laut Taschenrechner: 3,05505.

Aufgabe 2

Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = e^x$: die Exponentialfunktion ist sicher beliebig oft differenzierbar, wir können sehr einfach alle Ableitungen angeben:

$$f(x) = e^x \text{ und damit } f^{(n)}(x) = e^x \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Für die Reihenentwicklung um den Nullpunkt benötigen wir die Ableitungen an der Stelle $x = 0$:

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Damit erhalten wir sofort die Potenzreihenentwicklung der e-Funktion

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Nicht gefragt: ihr Konvergenzradius ist

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

Die Reihe konvergiert beständig.

Aufgabe 3

Nach dem 2. Newtonschen Axiom ist $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t) = m \cdot \ddot{\vec{s}}(t)$. Da $\vec{s}(t)$ nur einen Beitrag in y-Richtung enthält, genügt es natürlich, diese Richtung zu betrachten:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{e}{m}t^2 \\ \dot{s}(t) &= v(t) = \frac{2e}{m}t \\ \ddot{s}(t) &= \dot{v}(t) = a(t) = \frac{2e}{m} \\ &\Rightarrow F(t) = m \cdot a(t) = m\frac{2e}{m} = 2e \end{aligned}$$

Oder wieder in Vektorschreibweise:

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
K(v) &= \frac{a^2v}{v^2+b^2}, v>0 \\
\Rightarrow K'(v) &= \frac{a^2(v^2+b^2)-a^2v2v}{(v^2+b^2)^2} \\
&= \frac{a^2v^2+a^2b^2-2a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} \\
&= \frac{a^2b^2-a^2v^2}{(v^2+b^2)^2}
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Maximums wird die erste Ableitung Null gesetzt:

$$\begin{aligned}
K'(v) = \frac{a^2b^2-a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} &= 0 \Leftrightarrow a^2b^2-a^2v^2 = 0 \\
\Leftrightarrow v^2 &= b^2 \\
\Leftrightarrow v_{1/2} &= \pm b
\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung lautet

$$\begin{aligned}
K''(v) &= \frac{-2a^2v(v^2+b^2)^2-(a^2b^2-a^2v^2)2(v^2+b^2)2v}{(v^2+b^2)^4} \\
&= \frac{-2a^2v(v^2+b^2)-4v(a^2b^2-a^2v^2)}{(v^2+b^2)^3} \\
&= \frac{-2a^2v^3-2a^2b^2v-4a^2b^2v+4a^2v^3}{(v^2+b^2)^3} \\
&= \frac{2a^2v^3-6a^2b^2v}{(v^2+b^2)^3} \\
K''(b) &= \frac{2a^2b^3-6ba^2b^2}{(2b^2)^3} = \frac{-4a^2b^3}{8b^6} < 0 \text{ für b>0} \\
K''(-b) &= \frac{2a^2(-b)^3-6ba^2(-b)^2}{(2(-b)^2)^3} = \frac{4a^2b^3}{8b^6} \\
K(\pm b) &= \frac{a^2(\pm b)}{2b^2} = \pm\frac{a^2}{2b} > 0 \text{ für b>0}
\end{aligned}$$

Weil $v>0$, ist die positive Lösung der Wurzel

$$v = +\sqrt{b^2}$$

korrekt. Die negative Lösung bedeutet hier einfach eine Geschwindigkeit in die Gegenrichtung und der größte Wert ist natürlich

$$K(b) = \frac{a^2 b}{2b^2} = \frac{a^2}{2b}$$

Aufgabe 5

Für die Spiegelung an der x_1-x_2-Ebene gilt mit der Matrix S:

$$S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

als Gleichungssystem geschrieben

$$\begin{array}{llll} s_{11} \cdot x_1 & +s_{12} \cdot x_2 & +s_{13} \cdot x_3 & = x_1 \\ s_{21} \cdot x_1 & +s_{22} \cdot x_2 & +s_{23} \cdot x_3 & = x_2 \\ s_{31} \cdot x_1 & +s_{32} \cdot x_2 & +s_{33} \cdot x_3 & = -x_3 \end{array}$$

Damit sind die Koeffizienten $s_{33} = -1$, $s_{22} = 1$, $s_{11} = 1$ und alle weiteren $s_{ij} = 0$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) = e^x(x^2-5x+5) &= 0 \\ x^2-5x+5 &= 0 \\ x^2 - 2\cdot\frac{5}{2} + 5 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 &= 0 \\ \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} - \frac{20}{4} = \frac{5}{4} \\ &\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Extrema:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x^2-5x+5) + e^x(2x-5) = e^x(x^2-3x) = 0 \\ x^2-3x &= 0 \\ x_3 &= 0\ ;\ \ x_4 = 3 \\ f(0) &= 5\ ;\ \ f(3) = -e^3. \\ f''(x) &= e^x(x^2-3x) + e^x(2x-3) = e^x(x^2-x-3) \\ f''(0) &= -3 < 0\ ;\ \ f''(3) = 3e^3 > 0 \end{aligned}$$

Die Funktion hat also ein (lokales) Maximum in $(0/5)$ und ein (lokales) Minimum in $(3/-e^3)$.
Wendepunkte:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x(x^2-3x) + e^x(2x-3) = e^x(x^2-x-3) = 0 \\ x^2-x-3 &= 0 \\ &\Rightarrow x_{5,6} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \\ f(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}) &\approx -12,11 \\ f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}) &\approx 3,59 \end{aligned}$$

Die Wendepunkte sind $(2,30/-12,11)$ und $(-1,30/3,59)$. $f''(0) = e^0(0-0-3) = -3 < 0$, die Funktion ist also zwischen den Wendepunkt rechtsgekrümmt.

Asymptoten: das Polynom hat keine Polstellen, Verhalten für $x \to \pm\infty$ (für negative Werte wird zweimal die Regel von de L'Hospital benutzt):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} e^x(x^2-5x+5) &= \lim_{x\to\infty} e^x \cdot \lim_{x\to\infty}(x^2-5x+5) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^x(x^2-5x+5) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(-x)^2+5x+5}{e^x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0+\end{aligned}$$

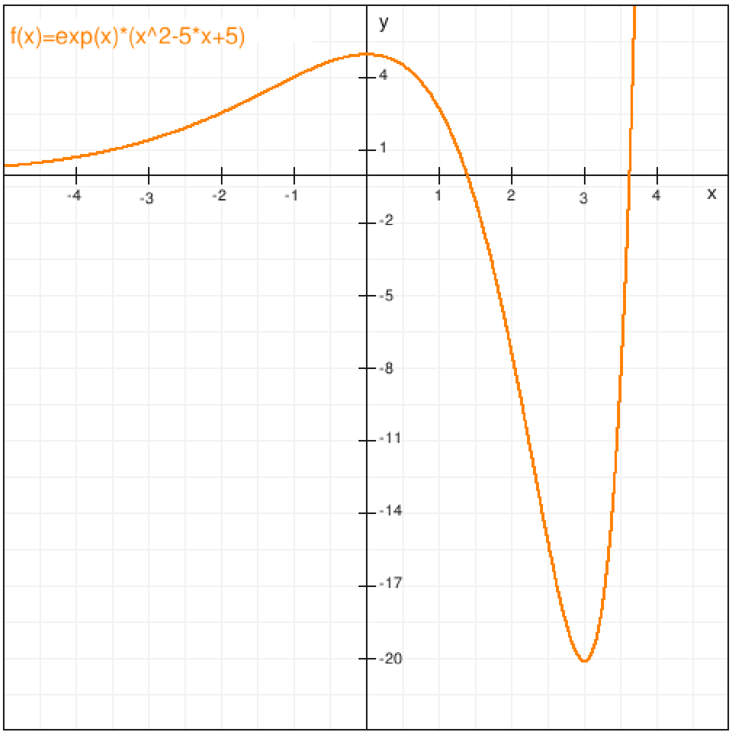

Abbildung 1: die Funktion $f(x) = e^x(x^2-5x+5)$ im Intervall $[-5; 5]$.

Aufgabe 7

Ableitung von

a)

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2+1}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} : \\ f'(x) &= \frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2+x}{2x-x^2} = \frac{x(x+1)}{x(2-x)} = \frac{x+1}{2-x}:$$
$$f'(x) = \frac{1\cdot(2-x)-(x+1)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+x+1}{(2-x)^2} = \frac{3}{(2-x)^2}$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(\sqrt{4x}):$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{4x})\cdot\frac{1}{2}(4x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4 = \frac{\cos\sqrt{4x}}{\sqrt{4x}}$$

d)

$$f(x) = x^2\cdot\ln(x):$$
$$f'(x) = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} = x(2\ln(x)+1)$$

Aufgabe 8

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3+2x^2+1 && \Rightarrow f(1)=4\\
f'(x) &= 3x^2+4x && \Rightarrow f'(1)=7\\
f''(x) &= 6x+4 && \Rightarrow f''(1)=10\\
f^{(3)}(x) &= 6 && \Rightarrow f^{(3)}(1)=6\\
f^{(n)}(x) &= 0 \text{ für } n>3.
\end{aligned}$$

Taylor-Entwicklung:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

da ab der vierten Ableitung alle weiteren verschwinden, gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{3}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \frac{4}{0!}(x-1)^0 + \frac{7}{1!}(x-1)^1 + \frac{10}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3.$$

Unter Ausnutzen von $0! = 1$ folgt nach ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}4 + 7(x-1) + 7(x-1) + \frac{10}{2}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 \\ = x^3 + 2x^2 + 1.\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung ist mit der ursprünglichen analytischen Darstellung identisch (da die Ableitungen einer Potenzreihe wieder eine Potenzreihe ergeben und die Darstellung der Funktion eindeutig ist). Daraus folgt für den Konvergenzradius natürlich, dass er dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ der Funktion entspricht.