Musterlösung zur Übungsklausur Mathematik 1 TML21

M. Oettinger 3.2022

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(14 Punkte):

(a) Betragsfreie Form:

$$f(x) == x \cdot e^{-|x|} = \begin{cases} x \cdot e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \\ x \cdot e^{x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Symmetrie: $f(-x) = (-x) \cdot e^{-|-x|} = (-x) \cdot e^{-|x|} = -f(x)$. Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung bzw. ungerade.

(b) Stetigkeit in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} x \cdot e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} x \cdot e^{x} = 0$$

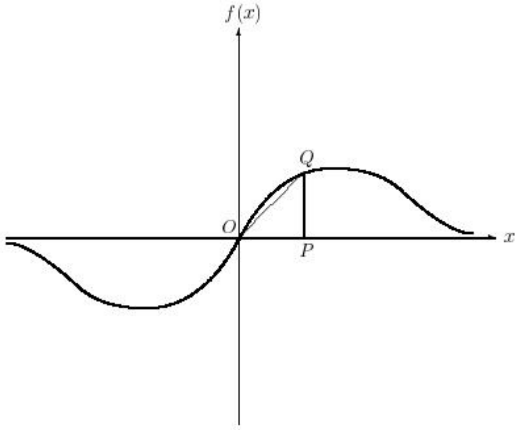
$\Rightarrow$ die Funktion $f(x)$ ist in $x_0 = 0$ stetig.

(c) Grenzwert für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x \cdot e^{-x} = 0+$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x \cdot e^{x} = 0-$$

(d) Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to 0+} (\sin(x))^x &= \lim_{n\to 0+} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right)^x \\
&= \lim_{n\to 0+} \cdot \underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...\right)^x}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to 0+} (\sin(x))^x = 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

b)

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

Wenn die Folge gegen g konvergiert, muss für große n gelten:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n - (2n+1)}{2 \cdot (2n+1)}\right| = \left|\frac{-1}{4n+2}\right| = \frac{1}{4n+2}$$

Die Folge konvergiert gegen g, wenn

$$\frac{1}{4n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow 4n+2 > \frac{1}{\varepsilon},$$

was für große n und beliebig kleine, aber feste ε erfüllt ist.

Aufgabe 3

Oma Nym bietet nach n Besuchen die Summe von (beim ersten Besuch mit $n = 1$):

$$S_1 = 10 + \sum_{i=1}^{n} 10 = 10 + n \cdot 10,$$

für Arnos Version ergibt sich (mit der Gauß-Summe)

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} 0,5 \cdot i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Arno gewinnt, wenn seine Summe größer ist, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &> 10 + n \cdot 10 \\ n^2 + n &> 40 + 40n \\ n^2 - 39n - 40 &> 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen der quadrat. Gleichung lauten $n_1 = -1$ und $n_2 = 40$, Arno gewinnt also nach insgesamt 41 Besuchen (die negative Lösung kann natürlich verworfen werden, weil die Summen nur positive Indizes liefern - oder anschaulich, weil eine negative Zahl von Besuchen nicht möglich ist).

Aufgabe 4

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{k!} \\ \Rightarrow \ e^{ix} &= \frac{1}{0!} \cdot 1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + ... \\ &= \frac{1}{0!} \cdot 1 + i\frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + -i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ... \\ &= \frac{1}{0!} \cdot 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ... \\ &+ i\left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ...\right) \end{aligned}$$

Mit der Euler-Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ergibt sich

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

Aufgabe 5

a) Aus der Geradengleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 3 + 3t &= x_1 \\ -1 - t &= x_2 \\ -1 - t &= x_3, \end{aligned}$$

setzt man die Werte für x_1, x_2 und x_3 in die Ebenengleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned} 2(3 + 3t) + 4(-1 - t) + 3(-1 - t) &= 6 + 6t - 4 - 4t - 3 - 3t \\ &= -1 - t = 1 \\ &\Rightarrow t = -2. \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt $\vec{P}$ ergibt sich durch einsetzen des gefundenen Wertes in die Geradengleichung:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Die x_2-Achse kann durch den Einheitsvektor $\vec{e}_{x_2}$ ausgedrückt werden:

$$x_2\text{-Achse: } s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt $\vec{Q}$ ergibt sich durch Gleichsetzen der beiden Geraden:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} -3 - 3t &= 0 \Rightarrow t = -1 \\ -1 - t &= s \Rightarrow s = 0 \\ -1 - t &= 0 \quad \text{ist erfüllt für} \quad t = -1. \end{aligned}$$

Die Gerade g schneidet die x_2-Achse also in

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(man erkennt im Prinzip direkt an der Geradengleichung, dass sie durch den Ursprung geht).

Aufgabe 6

(15 Punkte)
Die Objekte A und B werden beschrieben durch

$$A : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad B : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) A ist eine Ebene in Parameterform, B eine Gerade.

b) Die Gerade und die Ebene besitzen gemeinsame Punkte, wenn das LGS $A = B$ eine eindeutige Lösung besitzt

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & +0 & +t & = & 3 & -\lambda \\ 0 & +s & +0 & = & 2 & -\lambda \\ 1 & -s & -t & = & 1 & +0 \end{array}$$

Die Lösung des LGS lautet $s = -\frac{1}{2}, t = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{5}{2}$. Es existiert eine eindeutige Lösung, also schneidet die Gerade B die Ebene A, der Schnittpunkt ist

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Die Spiegelung wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} S \cdot P &= Q \\ &= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das LGS ist genau dann erfüllt, wenn $a_{11} = 1, a_{22} = 1, a_{33} = -1$ und alle weiteren Koeffizienten verschwinden. Die Matrix S ist also

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

$$\begin{aligned} 0,\bar{9} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \\ &= 9 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} - 1 \right) \text{ zusätzlicher Summand wg. } k = 0, \end{aligned}$$

bei der Summe handelt es sich um die geometrischen Reihe, die gegen den Wert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ konvergiert, da } |q| < 1.$$

$$\Rightarrow 0,\bar{9} = 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 9 \left(\frac{1}{\frac{9}{10}} - 1 \right) \qquad = 9 \left(\frac{10}{9} - \frac{9}{9} \right) = \frac{9}{9} = 1.$$