Aufgabe 1

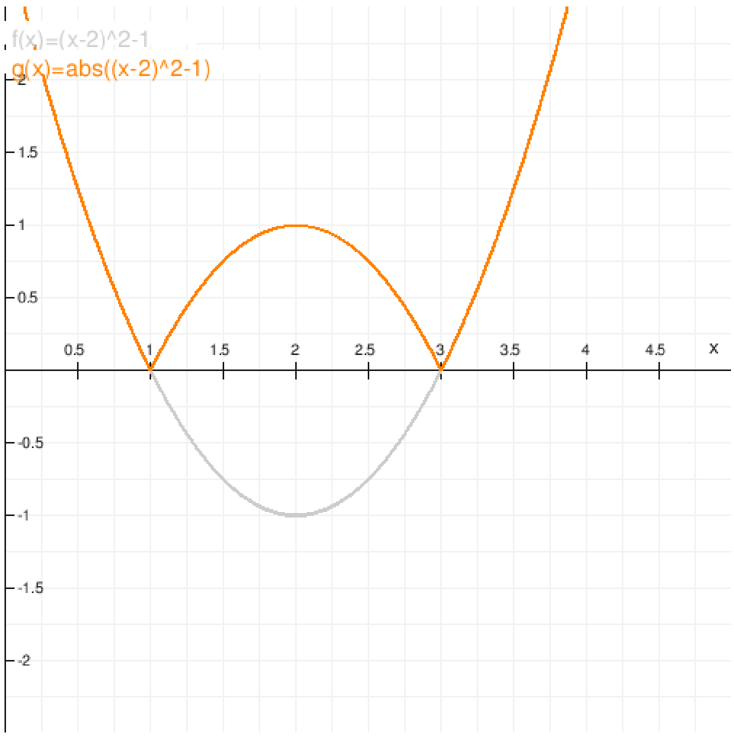
(10 Punkte)

$$\begin{aligned} f(x) &= |x^2 - 4x + 3|; \quad x \in \mathbb{R} \\ &= |x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 + 3| = |(x-2)^2 - 1| \\ \text{mit } &(x-2)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \\ &x_1 = 1; \qquad x_2 = 3 \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine eindeutige Zuordnung für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ ist eine Funktion. Die Funktion hat die Form einer verschobenen Parabel mit Scheitel bei $(2/-1)$, der Betrag spiegelt den Bogen unterhalb der x-Achse zwischen $x = 1$ und $x = 3$ ins Positive. Die Betragsfreie Form lautet

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 1 & \text{für} \quad x \in [1;3] \\ -((x-2)^2 - 1) = 1 - (x-2)^2 & \text{für} \quad x \notin [1;3] \end{cases}$$

Es handelt sich um eine Parabel, also hat die Funktion keine Lücken (die Parabel ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und zeigt im Verlauf keine Sprünge. Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

(13 punkte)
Berechnen bzw. lösen Sie

a)

$$2x^3 - 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Normierung:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

Die erste Lösung $x_1 = 1$ kann einfach geraten werden, die weiteren Lösungen über die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 3x^2 + 3x - 1\big) : \big(x - 1\big) = x^2 - 2x + 1 \\
\underline{-x^3 \;\; + x^2} \\
\qquad -2x^2 + 3x \\
\qquad \underline{\;\; 2x^2 - 2x} \\
\qquad\qquad\quad x - 1 \\
\qquad\qquad \underline{-x + 1} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Zu lösen bleibt die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 1;\; x_2 = 1\; x_3 = 1$$

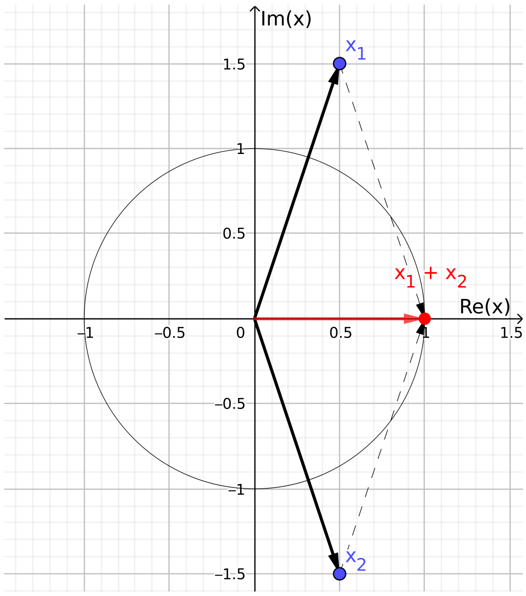
b)

$$\sum_{k=1}^{5}(2k-1) + \prod_{k=1}^{3}(2k+1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$= 25 + 105 = 130$$

c)

$$x^2 - x + \frac{5}{2} = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{10}{4} = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{3}{2}$$

Eine geeignete grafische Darstellung in der Gauß-Ebene:



Die Summe beträgt

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - i \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Aufgabe 3

(8 Punkte):

$$f(x) = \begin{cases} a^2(x+4) & \text{für} \quad x < 2 \\ 3(10a - 6x) & \text{für} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Die Funktion ist stetig in $x_0 = 2$, wenn

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2-} a^2(x+4) = 6a^2 = \\ &\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} 3(10a + 6x) = 30a - 36 \\ &\Leftrightarrow \quad 6a^2 = 30a - 36 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 5a + 6 = 0 \end{aligned}$$

Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung sind $x_1 = 3$ und $x_2 = 2$.

Aufgabe 4

(6 Punkte)
Behauptung: für alle natürlichen Zahlen ist

$n^2 + n$ eine gerade Zahl.

Beweis über vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n_0 = 1$. Es gilt

$n_0^2 + n_0 = 1^2 + 1 = 2$ ist gerade.

Induktionsschritt: Voraussetzung ist $n^2 + n$ gerade.

$$\begin{aligned}(n+1)^2 + n + 1 &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 \\ &= \underbrace{n^2 + n}_{\text{gerade n. Vor.}} + 2n + 2 \\ &= n^2 + n + 2(n+1)\end{aligned}$$

Da $n + 1 \in \mathbb{N}$ muss $2(n+1)$ durch 2 teilbar sein.

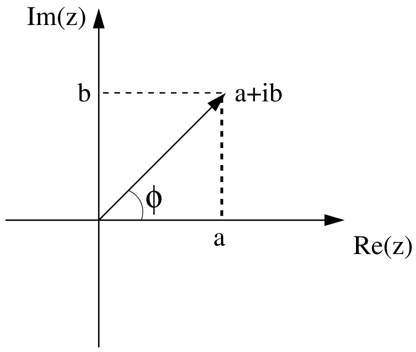
Aufgabe 5

(6 Punkte):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} (\sin(x))^{2x} &= \lim_{x\to 0+} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right)^{2x} \\ &= \lim_{x\to 0+} x^{2x} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...\right)^{2x} \\ &= \lim_{x\to 0+} \underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \cdot \underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...\right)^{2x}}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \\ \Longrightarrow \lim_{x\to 0+} (\sin(x))^{2x} &= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

Aufgabe 6

(11 Punkte)



a)

b) Kartesische Darstellung: mit $a = r\cos(\varphi), b = r\sin(\varphi)$ und $z_1 = a + ib$ folgt unter Ausnutzen von $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$z_1 = a + ib = 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 + i \cdot 2$$

Die Polardarstellung ist

$$z_1 = re^{i\cdot\varphi} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

c) der Betrag $|z|$ ist natürlich $r = 2\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_1} = 2 - i \cdot 2$.

d)

$$\begin{aligned}\frac{z_2}{z_1} &= \frac{z_2 \cdot \overline{z_1}}{z_1 \cdot \overline{z_1}} = \frac{1}{|\overline{z_1}|^2} \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} = \frac{(1+2i)(2-2i)}{(2\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{6+2i}{8} = \frac{1}{4}(3+i)\end{aligned}$$