Musterlösung zur Klausur Mathematik 3 TMM/TML23

M. Oettinger, Dez. 2024

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 54, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(8 Punkte)
Doppelintegral des halben Kreisringes (in Polarkoordinaten, weil es sich um einen Bereich mit Rotationssymmetrie handelt) (6 Punkte):

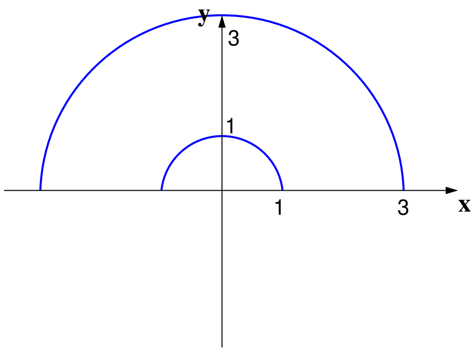

Abbildung 1: Skizze des Bereichs (A)

Bereich $(A): \; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \; ; \quad y \geq 0$.

a) Fläche des Bereichs (A):

$$\iint\limits_{(A)} dA = \int_{r=1}^{3} \int_{\varphi=0}^{\pi} r dr d\varphi = \pi \int_{1}^{3} r dr$$

$$= \pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^3 = \pi \frac{9-1}{2} = 4\pi$$

b)

$$\iint\limits_{(A)} y dA = \int_{r=1}^{3} \int_{\varphi=0}^{\pi} r \sin(\varphi) r dr d\varphi$$
$$= [-\cos(\varphi)]_0^\pi \int_1^3 r^2 dr = (1-(-1)) \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^3$$
$$= 2 \cdot \frac{27-1}{3} = \frac{52}{3}$$

Aufgabe 2

(10 Punkte) Berechnung von Integralen:

a) Mit partieller Integration

$$\int 2t \sin(\omega t) dt = 2 \int t \cdot \sin(\omega t) dt$$
$$= 2 \left((-\frac{1}{\omega}) \cos(\omega t) \cdot t - \left(\int -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \cdot 1 dt \right) \right)$$
$$= -\frac{2t}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{2}{\omega^2} \sin(\omega t) + C$$

b)

$$\int_0^\pi x \cos(2x) dx$$

partielle Integration:

$$\int_0^\pi x \cos(2x) dx = \left[x \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot \frac{\sin(2x)}{2} dx$$
$$= 0 - 0 - \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^\pi = \frac{1}{4} (\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0$$

c)

$$\int 4x e^{x^2} dx$$

kann direkt durch die Substitution $u = x^2$ gelöst werden:

$$\frac{du(x)}{dx} = 2x \qquad \Leftrightarrow \qquad dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int 4xe^{x^2}dx = 4\int xe^u \frac{du}{2x} = 2\int e^u du = 2e^u + C$$
$$= 2e^{x^2} + C$$

Aufgabe 3

(6 Punkte)

(a)

$$y'y + 2y = \sqrt{x} \tag{1}$$
$$y'y + 12y = y\cos(x) \tag{2}$$
$$12y + 3y' - y = 0 \tag{3}$$

Gleichung (1) ist eine nichtlineare, inhomogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.
Gleichung (2) ist eine lineare, inhomogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung (sie lässt sich durch $y \neq 0$ teilen: $y' = \cos(x) - 12$).
Gleichung (3) ist eine lineare, homogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten).

(b) Die allgemeine Lösung der DGL (1) enthält (DGL 1. Ordnung) einen freien Parameter - sie hat unendlich viele Lösungen.

(c) Die allgemeine Lösung der DGL (3) enthält (DGL 1. Ordnung) einen freien Parameter - sie hat unendlich viele Lösungen.

(d) Die allgemeine Lösung der DGL (2) enthält (DGL 1. Ordnung) einen freien Parameter. Durch die Randbedingung wird der Parameter eindeutig festgelegt, es bleibt genau eine Lösung.

Aufgabe 4

(9 Punkte)

$$y' + 2y = \sin(x) - 2\cos(x)$$

ist eine gewöhnliche, lineare und inhomogene DGL 1. Ordnung. Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$\begin{aligned}
y_h' + 2 \cdot y_h &= 0 \\
\frac{dy_h}{dx} &= -2 \cdot y_h \qquad \Leftrightarrow \qquad \int \frac{dy_h}{y_h} \qquad = \int -2 \cdot dx \\
\ln|y_h| &= -2 \cdot x + \ln|C| \\
y_h(x) &= C \cdot e^{-2x}
\end{aligned}$$

Lösung der inhomogenen DGL durch Aufsuchen einer partikulären Lösung: Ansatz ist

$$y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x) \qquad \Rightarrow \qquad y'(x) = A\cos(x) - B\sin(x)$$

Einsetzen in die DGL:

$$\begin{aligned}
y_p'(x) + 2y_p(x) &= A\cos(x) - B\sin(x) + 2(A\sin(x) + B\cos(x)) \\
&= (A + 2B)\cos(x) + (2A - B)\sin(x) = \sin(x) - 2\cos(x) \\
&\Rightarrow A = 0; \quad B = -1 \\
&\Rightarrow y_p(x) = -\cos(x)
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{-2x} - \cos(x); \quad C \in \mathbb{R}$$

Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten: Ansatz ist

$$y(x) = C(x) \cdot e^{-2x}; \qquad y'(x) = C'(x)e^{-2x} + C(x)(-2)e^{-2x}$$

in DGL

$$\Rightarrow \quad C(x) = \int e^{2x}(\sin(x) - 2\cos(x))dx$$

Das Integral ist nicht einfach zu lösen - das Aufsuchen einer partikulären Lösung ist die deutlich einfachere Variante!

Aufgabe 5

Differentialgleichung (6 Punkte)

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x,t) - k^2\frac{d^2}{dt^2}y(x,t) = 0,$$

eine lineare, partielle und homogene DGL 2. Ordnung. $y(x) = A\sin(kx - t)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt:

$$y' = A \cdot k \cdot \cos(kx - t); \quad y'' = -A \cdot k^2 \sin(kx - t)$$
$$\dot{y} = A \cdot (\cos(kx - t))(-1); \quad \ddot{y} = -A \cdot \sin(kx - t)$$

(mit der örtlichen Ableitung y' und der zeitlichen Ableitung $\dot{y}$). Eingesetzt in die DGL: $y'' - k^2\ddot{y} = 0$:

$$-A \cdot k^2 \sin(kx - t) - k^2 \cdot (-A \cdot \sin(kx - t)) = 0$$

$\Rightarrow y(x,t)$ ist Lösung der DGL.

Aufgabe 6

(6 Punkte)
$f(x) = \pi \cdot \sin(x)$ soll in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)dx = 0$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x)\cos(nx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(nx)dx = 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x)\sin(nx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\sin(nx)dx = \begin{cases} \pi & \text{für} \quad n = 1 \\ 0 & \text{für} \quad n \neq 1 \end{cases}$$

Als einziger Term bleibt also $b_1 = \pi$, in die Fourier-Reihe eingesetzt folgt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = b_1 \sin(1 \cdot x) = \pi \cdot \sin(x).$$

Einfacher findet man die Lösung, wenn man ausnutzt, dass der Sinus ungerade ist, es müssen also alle geraden Terme verschwinden ($a_0 = 0, a_n = 0$). Schreibt man die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \ldots$$

aus, erkennt man über einen einfachen Koeffizientenvergleich sofort, dass $b_1 = \pi$.

Aufgabe 7

(9 Punkte)
Gegeben ist

$$\frac{d}{dt}f(t) = -\lambda f(t)$$

a) Es handelt sich um eine separable DGL (von der Form $\dot{f}(t) = g(f) \cdot h(t)$):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(t) &= -\lambda f(t) \\
\frac{df(t)}{f(t)} &= -\lambda dt \\
\ln(|f(t)|) &= -\lambda t + \ln(|C|) \\
f(t) &= C \cdot e^{-\lambda t} \\
f(0) &= f_0 \quad \Rightarrow f(t) = f_0 \cdot e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

b) Mit der Laplace-Transformierten der Funktion

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),$$

der 1. Ableitung

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

und der Randbedingung $f(0) = f_0$ lässt sich die DGL wie folgt transformieren:

$$sF(s) - f_0 + \lambda F(s) = 0$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{f_0}{s+\lambda}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+\lambda}\} = f_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$