Musterlösung zur Übungsklausur Mathematik 1 TML23

M. Oettinger 3.2024

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(8 Punkte):

(a) Betragsfreie Form:

$$r(x) = \sin(|x+1|) = \begin{cases} \sin(x+1) & \text{für} x \geq -1 \\ \sin(-(x-1)) = -\sin(x+1) & \text{für} x < -1 \end{cases}$$

Jedem x-Wert aus D ist eindeutig ein Wert y zugeordnet $\Rightarrow$ es handelt sich um eine Funktion.

Symmetrie: sei $-1 \leq x < 0$, dann ist $r(-x) = sin(-x+1) \neq -r(x)$ und $r(-x) = sin(-x+1) \neq r(x)$. Die Funktion ist nicht symmetrisch.

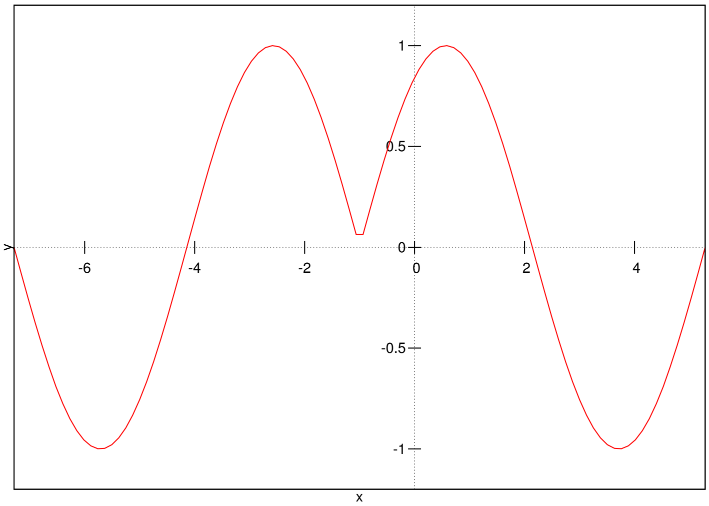
(b) Stetigkeit in $x_0 = -1$:

$$\lim_{x \to -1+} r(x) = \lim_{x \to -1+} \sin(x+1) = 0+$$

$$\lim_{x \to -1-} r(x) = \lim_{x \to -1-} -\sin(x+1) = 0+$$

$\Rightarrow$ die Funktion $r(x)$ ist in $x_0 = -1$ stetig.

(c) Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

a) 10 soll in zwei Teile geteilt werden, deren Produkt 50 ergibt:

$$
\begin{aligned}
(10-x)x &= 50 \\
x^2 - 10x + 50 &= x^2 - 10x + 25 - 25 + 50 = 0 \\
(x-5)^2 &= -25 \\
x - 5 &= \pm\sqrt{-25} = \pm i \cdot 5 \\
x_{1/2} &= 5 \pm 5i
\end{aligned}
$$

b) Eine Fläche vom 40m^2 kann natürlich trotzden nicht mit einem Zaun der Länge 2·10 m eingezäunt werden - die Länge des Zauns ist eine reelle Größe, die sich nicht durch eine komplexe Zahl (mit nicht verschwindendem Imaginärteil) ausdrücken lässt.

Aufgabe 3

Oma Nym bietet nach n Besuchen die Summe von (beim ersten Besuch mit $n = 1$):

$$S_1 = 10 + \sum_{i=1}^{n} 10 = 10 + n \cdot 10,$$

für Arnos Version ergibt sich (mit der Gauß-Summe)

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} 0,5 \cdot i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Arno gewinnt, wenn seine Summe größer ist, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &> 10 + n \cdot 10 \\ n^2 + n &> 40 + 40n \\ n^2 - 39n - 40 &> 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen der quadrat. Gleichung lauten $n_1 = -1$ und $n_2 = 40$, Arno gewinnt also nach insgesamt 41 Besuchen (die negative Lösung kann natürlich verworfen werden, weil die Summen nur positive Indizes liefern - oder anschaulich, weil eine negative Zahl von Besuchen nicht möglich ist).

Aufgabe 4

(5 Punkte) Die Potenzreihe für $\cos(i)$ lautet

$$\cos(i) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{i^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{0!} + (-1)\frac{i^2}{2!} + (-1)^2\frac{i^4}{4!} + (-1)^3\frac{i^6}{6!} + \dots$$

$$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{2n}}{(2n)!} = \text{cosh}(1) = 1.54308063482$$

Der symbolische Ausdruck $\cos(i)$ kann mit Hilfe der Potenzreihe einfach in eine reelle Zahl umgeschrieben werden.

Aufgabe 5

a) Aus der Geradengleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 3 + 3t &= x_1 \\ -1 - t &= x_2 \\ -1 - t &= x_3, \end{aligned}$$

setzt man die Werte für x_1, x_2 und x_3 in die Ebenengleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned} 2(3+3t)+4(-1-t)+3(-1-t) &= 6+6t-4-4t-3-3t \\ &= -1-t = 1 \\ &\Rightarrow t = -2. \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt $\vec{P}$ ergibt sich durch einsetzen des gefundenen Wertes in die Geradengleichung:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Die x_2-Achse kann durch den Einheitsvektor $\vec{e}_{x_2}$ ausgedrückt werden:

$$x_2\text{-Achse: } s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt $\vec{Q}$ ergibt sich durch Gleichsetzen der beiden Geraden:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} -3-3t &= 0 \Rightarrow t = -1 \\ -1-t &= s \Rightarrow s = 0 \\ -1-t &= 0 \quad \text{ist erfüllt für} \quad t = -1. \end{aligned}$$

Die Gerade g schneidet die x_2-Achse also in

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(man erkennt im Prinzip direkt an der Geradengleichung, dass sie durch den Ursprung geht).

Aufgabe 6

Berechnen bzw. Lösen Sie

a)

$$\begin{aligned}(2x^2-6x+4)(x-2)&=0\\ x-2&=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=2\\ 2x^2-6x+4&=0\\ x^2-3x-2&=0\\ &\Rightarrow x_2=2;\quad x_3=1\end{aligned}$$

b)

$$x^3-5x^2+8x-4=0$$
eine Lösung ist $x_0=2$.

Die restlichen Lösungen über Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}\big(\quad x^3-5x^2+8x-4\big):\big(x-2\big)=x^2-3x+2\\ \underline{-x^3+2x^2}\\ \quad -3x^2+8x\\ \quad \underline{3x^2-6x}\\ \qquad 2x-4\\ \qquad \underline{-2x+4}\\ \qquad\quad 0\end{array}$$

c)

$$\sum_{i=1}^{3}(2i)^2-\prod_{i=2}^{5}2=4+16+36-2^4=56-16=40$$

Aufgabe 7

$$\begin{aligned}0,\bar{9}&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{10^k}=9\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^k}\\ &=9\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^k}-1\right)\ \text{zusätzlicher Summand wg. } k=0,\end{aligned}$$

bei der Summe handelt es sich um die geometrischen Reihe, die gegen den Wert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ konvergiert, da } |q| < 1.$$

$$\Rightarrow 0,\bar{9} = 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 9\left(\frac{1}{\frac{9}{10}} - 1\right) \qquad = 9\left(\frac{10}{9} - \frac{9}{9}\right) = \frac{9}{9} = 1.$$