Musterlösung zur Klausur Mathematik 2 TMM10/TMK10

M. Oettinger 30.6.2011

Zeit: 45Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 27, 100%: 25 Punkte.

Aufgabe 1

(6 Punkte)

$$
\begin{aligned}
K(v) &= \frac{a^2 v}{v^2+b^2}, v > 0 \\
\Rightarrow K'(v) &= \frac{a^2(v^2+b^2) - a^2 v 2v}{(v^2+b^2)^2} \\
&= \frac{a^2v^2 + a^2b^2 - 2a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} \\
&= \frac{a^2b^2 - a^2v^2}{(v^2+b^2)^2}
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung des Maximums wird die erste Ableitung Null gesetzt:

$$
\begin{aligned}
K'(v) = \frac{a^2b^2 - a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} &= 0 \Leftrightarrow a^2b^2 - a^2v^2 = 0 \\
\Leftrightarrow v^2 &= b^2
\end{aligned}
$$

Weil $v > 0$, ist die positive Lösung der Wurzel

$$v = +\sqrt{b^2}$$

korrekt. Die negative Lösung bedeutet hier einfach eine Geschwindigkeit in die Gegenrichtung.

Aufgabe 2

(3 Punkte)
Gleichung der Tangente $t(x)$ an die Kurve $f(x) = y = 2x^3 + x^2 - 2x$ im Punkt $(1, 1)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 2x - 2 \\ t(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= 1 + 6(x-1) = 6 \cdot x - 5 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(6 Punkte)
Ableitung von Funktionen.

a) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(e^{2x} \cdot 3x\right)' = 2 \cdot e^{2x} \cdot 3x + 3 \cdot e^{2x} = e^{2x}(6x + 3) = 3e^{2x}(2x + 1)$$

b) differenzierbar für $x > 0$, da definiert und stetig in $\mathbb{R}^+$.

$$(x \cdot \ln(x))' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

c) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(e^{\cos(2x)}\right)' = e^{\cos(2x)} \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 = -2\sin(x) \cdot e^{\cos(2x)}$$

Aufgabe 4

(12 Punkte)
Untersuchung der Funktion $f(x) = x^3 - 3x - 2$ im Intervall $]-\frac{3}{2}, 3[$:
Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ f''(x) &= 6x \\ f^{(3)}(x) &= 6 \end{aligned}$$

Nullstellen: $f(x) = x^3 - 3x - 2 = x(x^2 - 3) - 2 = 0$. Durch Ausprobieren findet man ganz einfach $x = -1$ als Nullstelle.

Extrema: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$. Einsetzen in die Funktion $f(\pm 1) = (\pm 1)^3 \pm 3 - 2$ liefert die Extrema $(1, -4)$ und $(-1, 0)$.
Einsetzen in die zweite Ableitung:
$f''(\pm 1) = \pm 6 \Leftrightarrow$ Maximum bei $(-1, 0)$, Minimum bei $(1, -4)$.

Wendepunkte:
$f''(x) = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
$f^{(3)}(x) = 6 > 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $(0, -2)$.

Skizze der Funktion im angegebenen Intervall:

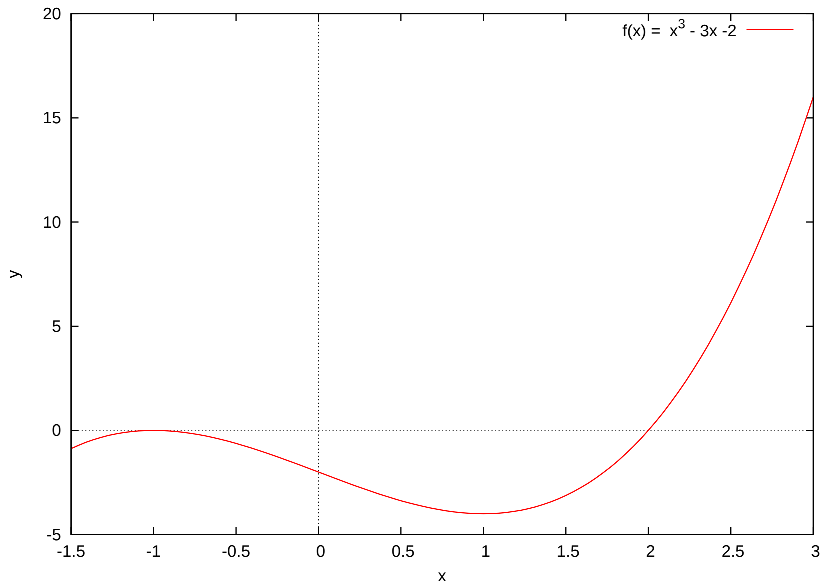

Abbildung 1: $f(x) = x^3 - 3x - 2$