Musterlösung zur Klausur Mathematik 3 TMK10/TMM10

M. Oettinger 22.12.2011

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

Integrale (6+4+3 Punkte):

(a)

$$2 \cdot \int \frac{1}{(x^2-1)} dx = \int \frac{2}{x^2-1} dx$$

Partialbruchzerlegung: Nullstellen des Nenners sind $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\Longrightarrow A(x+1) + B(x-1) = 2$$

Nullstellen eingesetzt $\Longrightarrow A = 1, B = -1$, also

$$2 \int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx$$
$$= \ln \mid x-1 \mid - \ln \mid x+1 \mid + C$$
$$= \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

(b) $\int x^2 \ln(2x) dx$

Partielle Integration mit $u' = x^2 \Rightarrow u = x^3/3$ und $v = \ln(2x) \Rightarrow v' = 1/x$:

$$\int x^2 \ln(2x) dx = \frac{x^3}{3} \ln(2x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln(2x) - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln(2x) - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C$$
$$= \frac{x^3}{3} \left(\ln(2x) - \frac{1}{3} \right) + C$$

(c) Trick: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$, partielle Integration mit $u' = 1 \Rightarrow u = x$ und $v = \ln(x) \Rightarrow v' = 1/x$:

$$\int 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x + C$$

Aufgabe 2

Doppelintegral des halben Kreisringes (in Polarkoordinaten) (4 Punkte):

$$\iint\limits_{(A)} dA; \qquad y \geq 0; 4 \leq x^2 + y^2 < 9.$$

$$\iint\limits_{(A)} dA = \int\limits_{r=2}^{3} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} r dr d\varphi = \int\limits_{r=2}^{3} \pi r dr = \pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_2^3 = \pi \frac{9-4}{2} = \pi \frac{5}{2}$$

Aufgabe 3

Differentialgleichung (1+3+3 Punkte)

(a) Lineare homogene Differentialgleichung 2.Ordnung

(b)

$$x^2 y''(x) - x y'(x) + y(x) = 0, \qquad x > 0$$

$f(x) = x \ln x$, $(x > 0)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt.

$$y = x \ln x \Longrightarrow y' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 \Longrightarrow y'' = \frac{1}{x}$$

eingesetzt in die Differentialgleichung:

$$x^2 \cdot \frac{1}{x} - x(\ln x + 1) + x \ln x = 0$$

(c)

$$f(x) = -\frac{1}{x}, f'(x) = \frac{1}{x^2}, f''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

einsetzen in die Gleichung liefert

$$-x^2 \frac{2}{x^3} - x\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \neq 0$$

$f(x)$ ist keine Lösung.

Aufgabe 4

Trennung der Variablen (4 Punkte):

$$y' = y^2 \cdot (sinx + 1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y^2} &= (\sin x + 1)dx \qquad y \neq 0 \\
\int \frac{dy}{y^2} &= \int (\sin x + 1)dx \\
-\frac{1}{y} &= -\cos x + x + C \\
y &= \frac{1}{\cos x - x - C}
\end{aligned}$$

Eine zusätzliche Lösung ist $y(x) = 0$.

Aufgabe 5

Anfangswertproblem (10 Punkte):

$$2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \qquad y \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1.Ordnung. Die zugehörige homogene Gleichung $2xy' - y = 0$ kann durch Trennung der Variablen gelöst werden:

$$f(x) = \frac{1}{2x}, \quad y_0 = Ce^{\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx}$$

$$= Ce^{\frac{1}{2}\ln|x|} = Ce^{\ln|\sqrt{x}|} = C \cdot \sqrt{x}$$

Die inhomogene Gleichung wird durch Variation der Konstanten gelöst:

Ansatz: $y = C(x)\sqrt{x}$,

$$y' = C'(x)\sqrt{x} + C(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

eingesetzt in die inhomogene Gleichung $2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$ ergibt sich

$$2xC'(x)\sqrt{x} + \underbrace{\frac{2x}{2\sqrt{x}}C(x) - C(x)\sqrt{x}}_{=0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$2xC'(x)\sqrt{x} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$C'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^2}$$

$$C(x) = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}dx - \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}(-2)x^{-\frac{1}{2}} - (-1)\frac{1}{x} + K$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + K$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = C(x)\sqrt{x} = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + K\sqrt{x}$$

Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblems (Bestimmung des freien Parameters K): $y \to -1$ für $x \to \infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0 \text{ für } x \to \infty \Longrightarrow -1 + K\sqrt{x} \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

$$\Longrightarrow K = 0.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 6

Differentialgleichungen (3 Punkte):

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \tag{1}$$

$$y'' = 4x \tag{2}$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	-	X
nicht-linear	X	-
homogen	-	-
inhomogen	X	X
Ordnung	1	2

Aufgabe 7

$f(x) = 3$ soll in eine Fourierreihe entwickelt werden (4 Punkte):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]$$

$$f(x) = 3 = \frac{a_0}{2} + a_1 \sin(x) + b_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + ...$$

Ein simpler Koeffizientenvergleich liefert

$$3 = \frac{a_0}{2} \qquad 0 = a_n \sin(nx); 0 = b_n \cos(nx) \quad \forall n > 0$$

$$\Longrightarrow a_0 = 2 \cdot 3 = 6 \qquad a_n = 0; b_n = 0 \quad \forall n > 0$$

Aufgabe 8

(2+7+1 Punkte)

(a) Skizze der Werte:

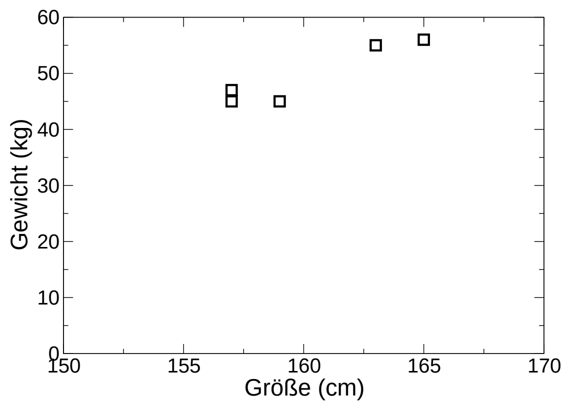

Abbildung 1: Das Gewicht von Schülern unterschiedlicher Größe.

(b) Anpassen der Funktion $y(x) = a + b \cdot x$ an gemessene Werte: die Minimierung der quadratischen Abweichungen vom arithmetischen Mittelwert liefert für die Steigung b

$$b = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

und für den Achsenabschnitt

$$a = b \cdot \bar{x} - \bar{y}$$

n	x_i	y_i	$(x_i - x)$	$(y_i - y)$	$(x_i - x)^2$	$(x_i - x) \cdot (y_i - y)$
1	157	46	-3,2	-3,4	10,24	10,88
2	157	47	-3,2	-2,4	10,24	7,68
3	159	45	-1,2	-4,4	1,44	5,28
4	163	53	2,8	3,6	7,84	10,08
5	165	56	4,8	6,6	23,04	31,68
Summe	801	247	0,00	0,00	52,80	65,60
Mittel	160,2	49,4				

Daraus ergibt sich für das Körpergewicht y der Schüler im Beispiel

$$y(x) = -149,64 + 1,242 \cdot x, \quad y \text{ in kg}, x \text{ in cm.}$$

(c) Gewicht eines Schülers mit 192,9cm Körpergröße:

$$y(x = 192,9) = -149,64 \text{ kg} + 1,242 \cdot 192,9 \text{ kg/cm} = 90,0\text{kg}$$