Wellen und Optik

Dr. M. Oettinger 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Wellen **2**

1.1 Beschreibung von Wellen 2

1.2 Arten von Wellen 3

1.3 harmonische Wellen 4

2 Optik **8**

2.1 das elektromagnetische Spektrum 8

2.2 elektromagnetische Wellen in Materie 10

2.2.1 Brechungsindex 10

2.2.2 Gaußsche Optik 11

2.2.3 Das Prinzip von Huygens/Fresnel 11

2.2.4 Das Fermat-Prinzip 12

2.2.5 Reflexion 12

2.2.6 Brechung 13

2.3 Brechung an einer sphärischen Oberfläche 14

2.4 dünne Linsen 16

2.4.1 Abbildung durch Linsen 17

2.4.2 die Lupe 18

2.4.3 Linsensysteme 19

2.5 Anwendungen 20

2.5.1 Mikroskop 20

2.5.2 Das Fernrohr 21

2.6 Interferenz, Wellenoptik 22

2.7 Beugung 25

2.7.1 Bragg-Beugung 26

1 Wellen

Was ist eine Welle? Wenn sich eine lokale Anregung (Stein wird ins Wasser geworfen, eine Stimmgabel vibriert, etc.) in Abhängigkeit von der Zeit im Raum ausbreitet, spricht man von Wellen (z.B. Wasserwellen, Schallwellen, ...). Als Beispiel Stellen wir uns ein gespanntes, dehnbares Seil vor, in dem eine Auslenkung senkrecht zur Seilrichtung nahe dem einen Ende erzeugt wird. Die Auslenkung wird sich entlang des Seils bis zum anderen Ende fortbewegen, wo sie reflektiert wird. Wir haben damit eine mechanische Transversalwelle unbekannter Form im Medium 'Seil' erzeugt.

Wellen sind ein immens wichtiger Baustein der Naturwissenschaften - man erkennt das sofort, wenn man die Teilgebiete der traditionellen Physik betrachtet:

- Mechanik - Pendel, Festkörper, Atome.
- Akustik - Entstehung und Ausbreitung von Schall wird stets durch Wellen beschrieben.
- Wärme - ungerichtete Energie, sie äußert sich in einem Medium als Brownsche Molekularbewegung: Schwingungen von Teilchen.
- Elektrizität/Magnetismus: elektromagnetische Wellen.
- Optik: Licht kann oft als elektromagnetische Welle beschrieben werden.

Bereits in der traditionellen Physik begegnen uns Wellen in allen Teilgebieten. In der modernen Physik verschmelzen die Grenzen, seit der Entwicklung der Quantenmechanik in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts hat sich gezeigt, dass auch Teilchen (und damit das Verhalten aller Materie) nur mithilfe von Wellen und deren Eigenschaften verstanden werden können.

1.1 Beschreibung von Wellen

Wir betrachten als Beispiel wieder unser gespanntes Seil. Die Auslenkung senkrecht zum Seil können wir sicher durch eine Funktion $y = f(x, t)$ in kartesischen Koordinaten beschreiben (die x-Achse unseres Koordinatensystems zeigt dann in Seilrichtung).

Die Auslenkung bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit c durch das Seil, sie wird nach einer Zeit t die Strecke $\Delta x = c \cdot t$ zurückgelegt haben: die Auslenkung, die sich zur Zeit 0 bei x befand, befindet sich also nach der Zeit t bei $x + c \cdot t$. Dies ist offenbar dann gegeben, wenn die Funktion nicht allein von x und t abhängt, sondern von der Kombination $x - ct$:

$$y = f(x - ct).$$

Man bezeichnet c als Ausbreitungsgeschwindigkeit, $x-ct$ als Phase der Welle. In den Ebenen, in denen $xc - ct$ den gleichen Wert hat, ist auch die Amplitude (Auslenkung) der Welle gleich. Wir bezeichnen die Ebenen als Wellenfronten oder Wellenflächen, sie sind stets senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Im Beispiel des gespannten Seils handelt es sich um parallele Ebenen senkrecht zur Richtung des Seils, es handelt sich um ebene Wellen.

1.2 Arten von Wellen

Transversalwellen: im einem nicht elastischen Seil lassen sich nur Wellen erzeugen, die eine Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung zeigen (die Welle ist gezwungen, sich entlang des Seils auszubreiten, eine Auslenkung in Seilrichtung ist aber nicht möglich). Das Paradebeispiel für eine Transversalwelle ist die elektromagnetische Welle im Vakuum, das elektrische und das magnetische Feld sind stets senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Longitudinalwellen: stellen wir uns ein elastisches Seil vor (z.B. ein Gummiseil, so können wir auch eine Auslenkung in Richtung des Seils erzeugen. Es handelt sich dabei um longitudinale Wellen. Schallwellen in Luft sind beispielsweise Dichtewellen - eine Veränderung der Dichte in einer Luftsäule bewegt sich als Störung in Ausbreitungsrichtung entlang der Säule.

Ebene Welle: die Auslenkung im Seil kann sich nur in eine Richtung fortbewegen - entlang des Seils (der Grund ist, dass die Raumrichtung, in die das Seil zeigt, ausgezeichnet ist - sie unterscheidet sich in ihren Eigenschaften von den anderen Richtungen). Die Wellenfronten sind parallele Ebenen.

Kugelwelle: eine elektromagnetische Welle im Vakuum breitet sich in alle drei Raumrichtungen aus (keine Richtung ist gegenüber den anderen ausgezeichnet). Die Wellenfronten sind kugelförmig.

Im Allgemeinen ist unsere Welt allerdings kompliziert - betrachtet man als simples Beispiel eine Wasseroberfläche, auf der eine Punktförmige Störung erzeugt wird, so erkennt man, dass es sich bei der daraus entstehenden Welle um ein recht komplexes Gebilde handelt. Die Welle breitet sich entlang der Wasseroberfläche aus (die Wellenfronten sind Zylinderförmig), es handelt sich bei den meisten Wellen in Flüssigkeiten um eine Mischung aus Transversal- und Longitudinalwelle (Boote an der Mauer, Korken).

1.3 harmonische Wellen

Warum bildet sich bei einer Auslenkung des Seils überhaupt eine Welle? Das Seil kann in guter Näherung durch ein Modell einer Kette von gekoppelten Oszillatoren dargestellt werden.

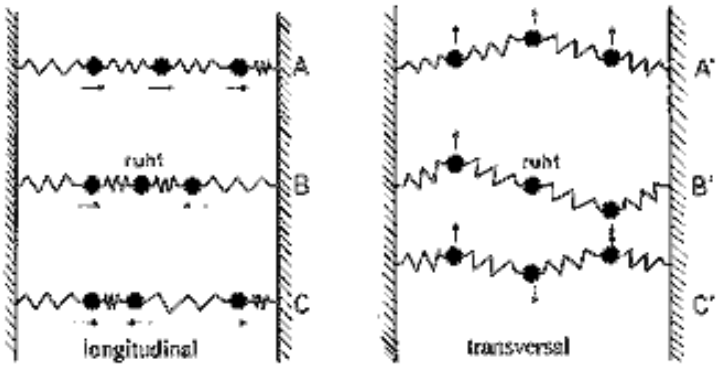

Abbildung 1: Entstehung von Wellen im Modell gekoppelter Oszillatoren

Die einzelnen Oszillatoren (kleine Massennpunkte) sind dann durch eine Wechselwirkung (im Bild symbolisch die Federn zwischen den Schwingern) verbunden, sie beeinflussen sich gegenseitig bei Auslenkung. Bei einer Auslenkung eines Schwingers treibt ihn eine Rückstellkraft zurück in seine Ruhelage, dabei werden die Oszillatoren in der Umgebung ebenfalls beeinflusst, es ergibt sich eine fortgesetzte Bewegung. Die Rückstellkraft wirkt stets in Richtung des Seils, bei einer Auslenkung nach oben oder unten ergibt sich aber eine Resultierende, die direkt von der Krümmung des Seils abhängt.

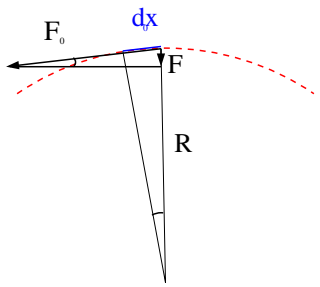

Abbildung 2: Rückstellkraft bei Auslenkung eines Seils.

Wenn die Auslenkung durch einen Kreisbogen mit Radius R beschrieben werden kann, wird der Teil der Kraft, der senkrecht zur Seilrichtung wirkt und das Seil in die Ausgangslage zurückzieht, in einem Seilstück der Länge dx den Betrag

$$F = F_0 \frac{dx}{R}$$

haben, denn es gilt die Beziehung $F/F_0 = dx/R$ (vgl. Abbildung 2). Bei kleiner Auslenkung ist die Krümmung mit dem Radius über

$$y'' = \frac{1}{R}$$

verknüpft, die Rückstellkraft wird damit zu

$$F = F_0 y'' dx.$$

Die Rückstellkraft, die auf das Seilstück der Länge dx wirkt, entspricht aber einer Beschleunigung, es gilt ($F = m \cdot a$) mit der Massendichte ρ im Seil und der Querschnittsfläche A

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{F}{m} = \frac{F}{\rho \cdot A dx} \\ \ddot{y} &= \frac{F_0 9 y'' dx}{\rho A dx} = \frac{F_0}{\rho A} y'' \\ \ddot{y} &= \frac{\sigma}{\rho} y'' \end{aligned} \tag{1}$$

Die Größe $\sigma = F_0/A$ ist die Seilspannung (eine Flächendichte der Kraft im Seil). Die Differentialgleichung (1) wird als Wellengleichung bezeichnet, sie ist in einer Dimension von der Form

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t),$$

ihre Lösung beschreibt das zeitliche und räumliche Verhalten einer harmonische Welle.

Im folgenden werden wir das Verhalten von Wellen anhand solcher harmonischer Wellen betrachten. Es handelt sich um 'einfachste' Wellen ohne Dämpfung mit kleiner, sinusmodulierter Amplitude sowie einer Richtung und Frequenz (z.B. Laserpointer). Sie sind für die Beschreibung unserer Welt aber enorm nützlich, da (fast) jeder periodische Vorgang in der Realität in harmonische Schwingungen zerlegt werden kann (Fourier-Entwicklung).

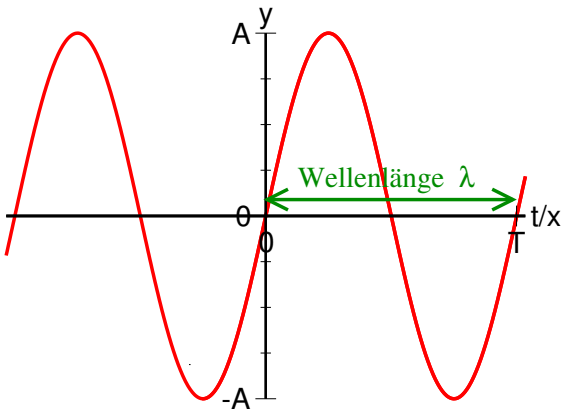

Abbildung 3: $\sin(x)$ bzw. $\sin(t)$.

Wir betrachten eine harmonische (sinusförmige) Anregung im Ursprung eines Koordinatensystems,

$$y(x=0,t) = A\sin(\omega t)$$

mit der Amplitude A und der Kreisfrequenz ω. Um sich vom Ursprung bis an die Stelle x zu bewegen, benötigt eine Wellenfront die Zeit x/c, d.h. der Bewegungszustand der Welle an der Stelle x zur Zeit t entspricht dem Zustand der Welle im Ursprung zu einem früheren Zeitpunkt $t - x/c$:

$$y(x,t) = A \cdot \sin\left((\omega(t - \frac{x}{c})\right) = A\sin\left(\omega t - kx\right), \tag{2}$$

dabei wurde die Wellenzahl $k = \frac{\omega}{c}$ benutzt. Eine Momentaufnahme der Welle, der Einfachheit halber bei $t = 0$ wir dann beschrieben durch

$$y(x) = A\sin(kx).$$

Die Funktion ist 2π-periodisch, also wiederholt sich die Auslenkung der Welle alle $kx = 2\pi$. Durch Auflösen nach x erhalten wir die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Weiter bewegt sich die Welle offensichtlich während einer Periodendauer T um eine Wellenlänge λ fort, also gilt

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \tag{3}$$

oder mit der Beziehung $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ und $\omega = 2\pi f$

$$\begin{aligned} c = \lambda \cdot f = \frac{2\pi\omega}{2\pi k} = \frac{\omega}{k} \\ \Rightarrow \omega = c \cdot k \end{aligned} \tag{4}$$

Die letzte Form wird als Dispersionsrelation bezeichnet, sie beschreibt den Zusammenhang zwischen der zeitlichen (ω) und der räumlichen Periodizität (k) der Welle. im einfachsten Fall (c frequenzunabhängig) ist der Zusammenhang linear, im allgemeinen Fall hängt die Geschwindigkeit aber von der Frequenz ab: $c = c(\omega)$.

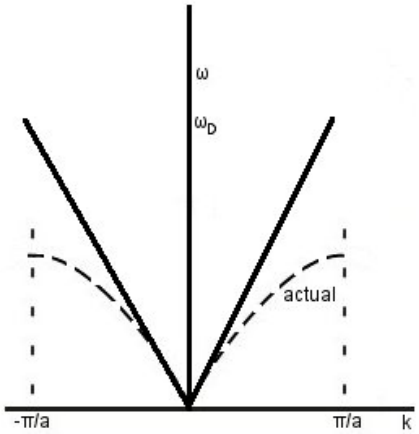

Abbildung 4: Dispersionsrelation: die durchgezogene Linie zeigt eine Lichtgeschwindigkeit, die nicht von der Frequenz abhängt, in der Realität ist sie im Material davon abhängig (gepunktete Linie: Dispersionsrelation, berechnet für einen Festkörper im Debye-Modell)

2 Optik

Optik ist die Lehre vom Licht, meist interessieren dabei natürlich die Entstehung und die Ausbreitung von Licht. Sie kann in zwei große Teilgebiete, die klassische Optik und die Quantenoptik gegliedert werden. In der klassischen Optik unterscheidet man zwei Zugänge zur Beschreibung der Lichtausbreitung: Wellenoptik und geometrische Optik. Die Grundlage der Wellenoptik ist die Wellennatur des Lichts. Die Gesetzmäßigkeiten der geometrischen Optik gelten für den Fall, dass die Abmessungen des optischen Systems sehr groß gegenüber der Wellenlänge des Lichts sind (bei geringen Abmessungen der Komponenten gegenüber der Wellenlänge spricht man von Mikrooptik).

2.1 das elektromagnetische Spektrum

Die Gesamtheit der elektromagnetischen Wellen aller Energien bzw. Frequenzen. Man unterteilt die auftretenden Wellen in unterschiedliche Energiebereiche (die Einteilung ist meist willkürlich und historisch gewachsen), üblich ist die Einteilung nach Wellenlängen. Die Frequenz ist mit der einfachen Beziehung $c = \lambda \cdot f$ mit der Wellenlänge verknüpft und deshalb einfach zu berechnen. Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Bereiche der elektromangetischen Strahlung.

Bezeichnung	Wellenlänge λ	Frequenz	
ELF (Extremely Low Frequency)	10-100 Mm	3-30Hz	Bahnstrom
SLF (Super Low Frequency)	1-10 Mm		Stromnetz, früher U-Boot-Kommunikation
ULF (Ultra Low Frequency)	100-1000 km		
VLF (Very Low Frequency)	10-100 km		
Langwelle	-10km		Radio, TV, Funk
Mittelwelle	-680m		Radio, TV, Funk
Kurzwelle	-180m		Radio, TV, Funk
Ultrakurzwelle	-10m		Radio, TV, Funk
Dezimeterwellen	-1m		Radar
Zentimeterwellen	-10cm		Mikrowellen
Millimeterwellen	-1cm		
Infrarot	780nm - 1mm		Thermografie Fernbedienung Laserdioden (CD)
rot	640-780nm	384THz	
orange	600-640nm		
gelb	570-640nm		
grün	490-570nm		
blau	430-490nm		
violett	380-430nm	789THz	blu-ray Disc
UV	50-380nm		EUV-Lithographie
XUV	1nm-50nm		
Röntgen	10pm-1nm		Medizin (Bild) Strukturanalyse
Gammastrahlung	-10pm		Radioaktivität

Tabelle 1: Einteilung des elektromagnetischen Spektrums nach Wellenlänge.

2.2 elektromagnetische Wellen in Materie

Eine der wichtigsten Problemstellungen der Optik ist die Ausbreitung von Licht im Raum. Natürlich ist dabei eine Welle, die sich geradlinig in einem gleichförmigen Medium oder im Vakuum ausbreitet, vom technischen Standpunkt gesehen eher uninteressant. Trifft diese Welle aber auf ein Hindernis oder bewegt sich durch ein Medium, dessen Eigenschaften sich ändern (z.B. an der Grenzfläche zwischen zwei Materialien), so liegt die Vernutung nahe, dass sich auch das Verhalten der Welle ändert. Wir können das Verhalten der Welle unter gewissen vereinfachenden Annahmen und Beachtung einiger Grundprinzipien recht einfach beschreiben.

2.2.1 Brechungsindex

Der Brechungsindex (auch als Brechzahl bezeichnet) ist eine optische Materialeigenschaft. Die dimensionslose Größe gibt den Faktor an, um den Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit des Lichts kleiner sind als im Vakuum.

An der Grenzfläche zweier Medien, die sich in ihren Brechungsindizes unterscheiden, wird Licht gebrochen und reflektiert. Dabei nennt man das Medium mit dem höheren Brechungsindex das optisch dichtere.

Definition: Brechungsindex

Der Brechungsindex gibt das Verhältnis der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 zur Ausbreitungsgeschwindigkeit c des Lichts im Medium an:

$$n = \frac{c_0}{c}$$

Da die Phasengeschwindigkeit im Material von der Wellenlänge des einfallenden Lichts abhängt (dies gilt allgemein auch bei elektromagnetischer Strahlung außerhalb des sichtbaren Bereichs), ist der Brechungsindex strenggenommen eine Funktion der Wellenlänge. Da dies aber für einfache Anwendungen nicht relevant ist, wird er meist für die Wellenlänge der Natrium-D-Linie (589 nm) angegeben.

Der Brechungsindex in Luft beträgt auf Meeresniveau 1,00028 (für trockene Luft bei Normatmosphäre), er wird meist als eins angenähert. Im sichtbaren Bereich sind die Brechungsindizes realer Materialien praktisch immer größerer als 1, es ist beispielsweise (für Licht mit einer Wellenlänge von 589 nm) in Wasser $n = 1,33$, für Brillengläser aus Kunststoff n etwa $1,76$, für echte Gläser in Brillen bis zu $n = 1,9$. Er hängt als Materialkonstante direkt mit dem atomaren Aufbau des jeweiligen Materials zusammen.

2.2.2 Gaußsche Optik

Zunächst nehmen wir an, dass wir Licht (oder allgemein die Welle, die wir beschreiben wollen) als ein Bündel von Strahlen betrachten können. Wir sehen Licht, dass sich von einer Quelle ausbreitet also als ebene Welle oder Teilchen, das sich auf einer Linie geradlinig von der Quelle wegbewegt. Der Lichtweg ist dabei stets umkehrbar, ein Lichtstrahl, der in entgegengesetzter Richtung läuft, folgt dem exakt gleichen Weg.

Als vereinfachende Näherung gehen wir davon aus, dass wir uns im Bereich der paraxialen (oder Gaußschen) Optik bewegen - wir betrachten nur Lichtstrahlen, die mit der optischen Achse (der Symmetrieachse eines optischen Elements oder Systems) kleine Winkel bilden und kleine Abstände von ihr haben. Die Näherung liefert vernünftige Ergebnisse, solange die Kleinwinkelnäherung erfüllt ist, etwa für Winkel bis 5°. In diesem Fall gelten die Beziehungen

$$\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \alpha \tag{5}$$

2.2.3 Das Prinzip von Huygens/Fresnel

Das Huygens-Prinzip besagt, dass von jedem Punkt einer Wellenfront (vgl. Abb. 5) stets eine Kugelwelle, auch als Elementarwelle bezeichnet, ausgeht.

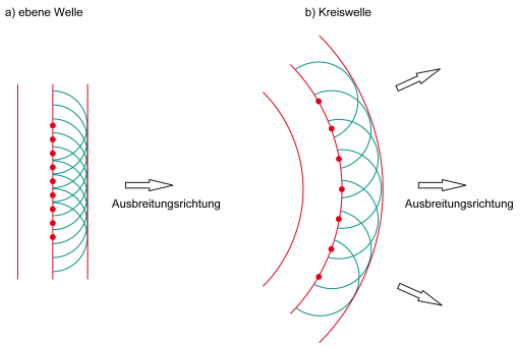

Abbildung 5: Das Prinzip von Huygens/Fresnel.

Da die Wellenfronten einer ebenen Welle die bis ins Unendliche ausgedehnten Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung sind, bleibt eine solche Welle auch bei Anwendung des Huygens-Prinzips eben.

2.2.4 Das Fermat-Prinzip

Licht nimmt zwischen zwei Punkten immer den Weg, für den es so wenig Zeit wie möglich benötigt (der 'optisch kürzeste Weg'). Dieses simple Prinzip ermöglicht in unserem einfachen Fall direkt die Ableitung des Lichtwegs bei Reflexion und Brechung eines Lichtstrahls an der Grenzfläche zwischen Medien mit unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten.

2.2.5 Reflexion

Trifft Licht (ein Lichtstrahl) unter einem Winkel α (gemessen gegen die Normale der Oberfläche) auf eine Oberfläche, eine Grenzfläche zwischen zwei Medien, so wird im allgemeinen ein Teil des Lichts an der Fläche reflektiert. Wir gehen zunächst von einer ebenen und glatten Oberfläche aus (ein gutes Beispiel wäre eine polierte Metalloberfläche).

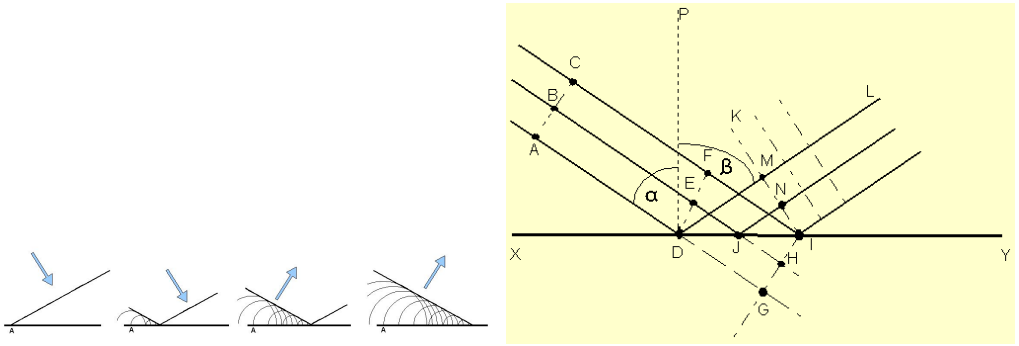

Abbildung 6: Reflexion nach dem Prinzip von Huygens/Fresnel.

Die Elementarwelle, die auf der linken Seite im Punkt D entsteht, wird reflektiert und läuft in Gegenrichtung weiter. In der Zeit, die die Elementarwelle auf der anderen Seite der Wellenfront in Punkt F benötigt, um die Strecke bis zur Grenzfläche (Punkt I) zurückzulegen, hat die reflektierte Elementarwelle dieselbe Strecke (in den oberen Halbraum) zurückgelegt. Also ist die Strecke $\overline{FI}$ gleich der Strecke $\overline{DM}$, oder der Einfallswinkel α gleich dem Ausfallswinkel β.

$$\sin(\alpha) = \sin\beta \tag{6}$$

Dieser Ausdruck wird als Reflexionsgesetz bezeichnet.

2.2.6 Brechung

Tritt ein Lichtstrahl aus einem Medium I mit Lichtgeschwindigkeit c_1 und Brechungsinden n_1 unter dem Winkel α in ein optisch+dichteres Medium II mit Lichtgeschwindigkeit $c_2 < c_1$ und Brechungsinden $n_2 > n_1$ ein, so wir er sich nach dem Übergang natürlich wieder geradlinig weiterbewegen. Er wird dabei allerdings seine Richtung verändern, sofern sich die Lichtgeschwindigkeiten der Materialien unterscheiden. Auch das ist mit Hilfe des Huygens-Prinzips leicht einzusehen.

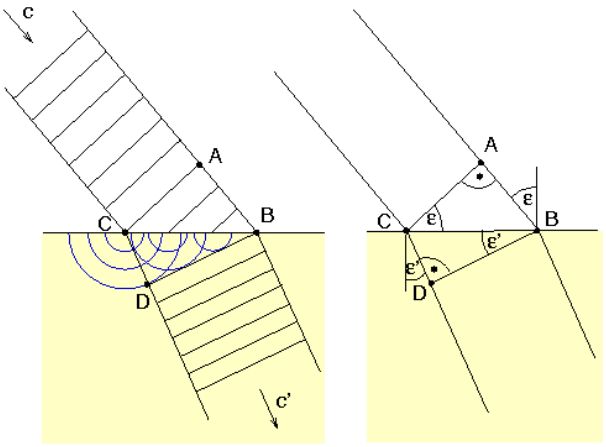

Abbildung 7: Brechung beim Übergang in ein optisch dichteres Medium nach dem Prinzip von Huygens/Fresnel.

In der Zeit, die eine Elementarwelle von der einen Seite der Wellenfront benötigt, um den Weg durch das Medium I an die Grenzfläche zurückzulegen, hat sich die Wellenfront auf der anderen Seite bereits durch Medium II bewegt. Da die Lichtgeschwindigkeit c_2 in Medium II geringer ist, ist die Strecke in Medium II natürlich kürzer. Verbindet man die Wellenfronten, die nach dieser Zeit in Medium II entstanden sind, so sieht man sofort, dass die Wellenfront ihre Richtung im Raum geändert hat. Damit ändert sich natürlich auch die Ausbreitungsrichtung der Welle, die ja stets senkrecht dazu ist. Der Strahl ändert seine Richtung, er wird beim Übergang in ein optisch dichteres Medium zur Normalen hin gebrochen.

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \sin(\alpha) &= c_2 \cdot \sin(\beta) \\ \iff \frac{n_1}{n_2} &= \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \end{aligned} \tag{7}$$

Die Beziehung wird auch als das Brechungsgesetz von Snellius bezeichnet.

Im Fall einer rauen Oberfläche (Beispielsweise einer tapezierten Wand), besitzt die Oberfläche viele kleine Teilflächen, die sich durch unterschiedliche Normalenrichtungen voneinander unterscheiden. Das Licht wird diffus reflektiert, da das Strahlenbündel eine radiale Ausdehnung besitzt.

2.3 Brechung an einer sphärischen Oberfläche

Wir betrachten ein Bündel von Lichtstrahlen, das an einer sphärischen Oberfläche mit dem Radius r aus einem Medium mit Brechungsindex n_1 in ein optisch dichteres mit dem Brechungsindex $n_2 > n_1$ übergeht.

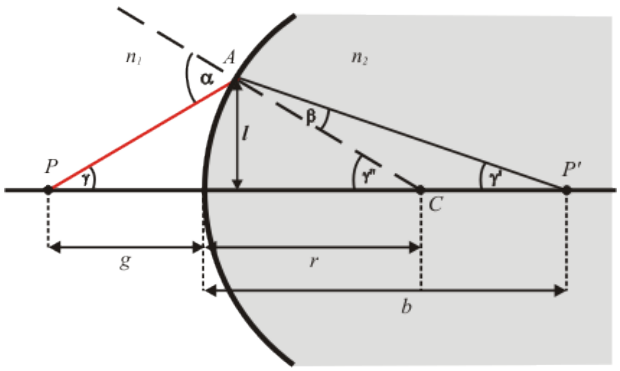

Abbildung 8: Brechung eines Lichtstrahls an einer sphärischen Oberfläche.

Ein Lichtstrahl läuft unter dem Winkel γ aus einem Punkt P auf der optischen Achse, der sich im Abstand g, der Gegenstandsweite, vor der Grenzfläche befindet und trifft unter dem Winkel α auf die Oberfläche. Dort wird er gebrochen und tritt unter dem Winkel β in das optisch dichtere Medium ein. Er trifft die optische Achse im Winkel γ'' im Punkt P' mit Abstand b (der Bildweite). Der Radius der Oberfläche trifft den Punkt A, in dem der Strahl gebrochen wird, unter dem Winkel γ' im Abstand l von der optischen Achse. Falls Winkel und Abweichungen von der optischen Achse klein sind, gilt

$$\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \alpha,$$

der Einfallswinkel γ und der Ausfallswinkel γ'' können also als

$$\gamma = \frac{l}{g} \quad \text{und} \quad \gamma'' = \frac{l}{b}$$

geschrieben werden, der Winkel γ' ist

$$\gamma' = \frac{l}{r}.$$

Ferner lassen sich Einfalls- und Ausfallswinkel als

$$\alpha = \gamma + \gamma' \quad \text{und} \quad \beta = \gamma' - \gamma''$$

ausdrücken. Das Gesetz von Snellius (7)

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

kann also umgeschrieben werden als

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma + \gamma'}{\gamma' - \gamma''} &= \frac{n_2}{n_1} \\
\frac{\frac{l}{r} + \frac{l}{g}}{\frac{l}{r} - \frac{l}{b}} = \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{g}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} &= \frac{n_2}{n_1} \\
n_1 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{g} \right) &= n_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \\
\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} &= \frac{n_2 - n_1}{r}
\end{aligned} \tag{8}$$

Die Höhe l verschwindet, der Abstand b, nach dem der Strahl nach der Brechung die optische Achse schneidet, ist unabhängig davon, unter welchem Abstand l von der optischen Achse er gebrochen wird. Alle Strahlen vereinigen sich nach der Brechung in einem Punkt im Abstand b auf der Achse. Lässt man den Punkt, aus dem Strahlen einfallen nach links ins Unendliche wandern (d.h. $g \to \infty$), so erhält man ein paralleles Strahlenbündel, das auf die brechende Oberfläche fällt. Im Grenzwert erhalten wir

$$\frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot r =: f,$$

die hintere Brennweite. Sie gibt den Abstand an, unter dem sich parallel auf die brechende Oberfläche fallende Strahlen vereinigen. Analog ergibt sich für parallele Strahlen nach der Brechung ($b \to \infty$) die vordere Brennweite

$$F := g = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \cdot r.$$

Alle Strahlen, die vor der Brechung den Punkt im Abstand F auf der optischen Achse passiert haben, werden nach der Brechung zu Parallelstrahlen.

2.4 dünne Linsen

Geht ein Lichtstrahl durch eine Linse, so wird er zunächst an der Vorderseite (links) beim Durchgang in das optisch dichtere Medium gebrochen, dann nach dem Durchgang beim Übergang in das optisch dünnere Medium.

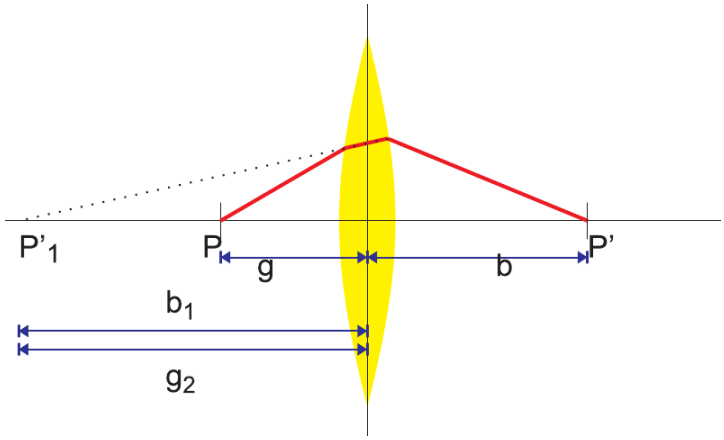

Abbildung 9: Brechung eines Lichtstrahls an einer Linse.

Wir betrachten die beiden Brechungen bei Abbildung des Punktes P mit der Gegenstandsweite g getrennt und nutzen die Ergebnisse, die wir für eine sphärische Oberfläche erhalten haben: sofern sich die Linse in Luft befindet (Brechungsindex = 1), können wir die Brechung an der Vorderseite (links in Abb. 9), als eine Brechung an der sphärischen Oberfläche mit Radius r_1 betrachten. Mit den Brechungsindizes n in der Linse, 1 außerhalb ergibt sich mit Gleichung 8 ein virtuelles Bild in P_1' im linken Halbraum. Die Bildweite b_1 wird also negativ.

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{r_1} \tag{9}$$

Bei der zweiten Brechung nach dem Durchgang durch die Linse wird das virtuelle Bild P_1' in ein reelles Bild im rechten Halbraum abgebildet. Die Brechung geschieht beim Übergang vom optisch dichteren Medium (Brechungsindex n) in Luft:

$$\frac{n}{g_1} + \frac{1}{b} = \frac{1-n}{r_2} \tag{10}$$

Die Gegenstandsweite entspricht vom Betrag der Bildweite der ersten Brechung, das Vorzeichen ist aber positiv

$$g_1 = -b_1.$$

Addiert man die Gleichungen (9) und (10) und setzt die Gegenstandsweite g_1 ein, so folgt

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b_1} - \frac{n}{b_1} + \frac{1}{b} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{1-n}{r_2}$$
$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Aus dieser Gleichung erhält man wieder die Brennweite der Linse, indem man die Gegenstandsweite g_1 gegen Unendlich laufen lässt:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Also kann die Brennweite mit der Gegenstands- und der Bildweite der Linse verknüpft werden:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad \text{heißt Abbildungsgleichung.} \tag{11}$$

Die Abbildungsgleichung erlaubt es, Abbildungen durch Linsen und -systeme einfach zu berechnen.

2.4.1 Abbildung durch Linsen

Ein Gegenstand der Größe G im Abstand g vor einer konvexen Linse liefert (unter Anwendung der Gaußschen Näherungen und Vernachlässigung von Abbildungsfehlern durch die Linse) ein scharfes Bild B im Abstand b nach der Brechung. Diese Art der Abbildung durch eine einzelne Linse wird beispielsweise im einfachen Fotoapparat genutzt. Mit Hilfe der Abbildungsgleichung (11) lässt sich die Bildweite berechnen:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}} = \frac{f \cdot g}{g - f},$$

die Vergrößerung des Bildes ist der Faktor

$$V := \frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{1}{g}\frac{fg}{g-f} = \frac{f}{g-f}.$$

Die Vergrößerung bei der Abbildung hängt also unter den gewählten Näherungen lediglich vom Abstand des Gegenstands von der Brennweite der Linse

$x := gt - f$ ab. Ein Sonderfall ist die Abbildung ohne die Veränderung der Größe, hier gilt

$$V = \frac{B}{G} = \frac{f}{g-f} = 1 \quad \Rightarrow \quad g = 2f.$$

Ist der Gegenstand weiter entfernt ($g > 2f$), so ergibt sich ein verkleinertes Bild, liegt die Gegenstandsweite zwischen $2f$ und f, ist das Bild reell und vergrößert. Befindet sich der Gegenstand innerhalb der Brennweite ($g < f$), so ergibt sich ein virtuelles Bild vor der Linse.

In der Realität ist die Vergrößerung durch eine Linse durch Abbildungsfehler und die Intensität des Bildes begrenzt. Durch die Kombination von Linsen lassen sich die Abbildungseigenschaften teilweise verbessern.

2.4.2 die Lupe

Das virtuelle Bild für einen Gegenstand innerhalb der Brennweite einer Einzellinse wir bei einer Lupe angewandt - sie erzeugt ein aufrechtes und vergrößertes virtuelles Bild. Die Entstehung des Bildes lässt sich nur verstehen, wenn zusätzlich zur Lupe das Auge des Beobachters betrachtet wird. Für die Konstruktion des virtuellen Bildes betrachten wir einen Mittelstrahl, der ohne Brechung durch den Mittelpunkt der Linse tritt und einen Parallelstrahl, der durch die Brechung der Linse zum Brennstrahl wird.

Der Betrachter, der sich in der Abbildung rechts von der Linse befindet, geht von der geradlinigen Ausbreitung des Lichts aus. Für ihn scheint also das Licht von der Stelle auszugehen, an der sich die Verlängerungen der beiden Strahlen kreuzen. Also befindet sich das virtuelle Bild genau dort.

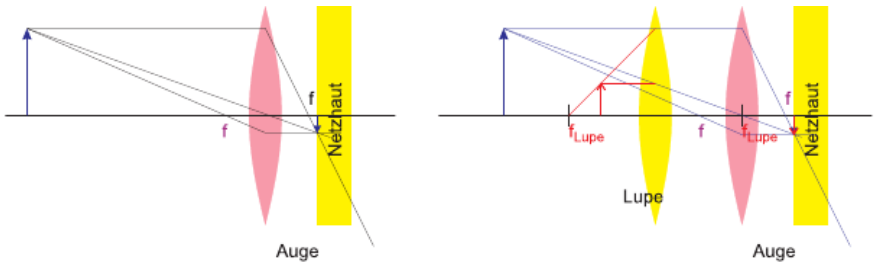

Abbildung 10: Das Prinzip der Lupe

Der Gegenstand muss sich innerhalb der Brennweite befinden, um ihn durch die Lupe vergrößert zu sehen. Optimal wird die Lupe gehalten, wenn sich

der Gegenstand im Brennpunkt befindet, die Strahlen verlaufen dann parallel. Das virtuelle Bild scheint unendlich weit weg zu sein, das Auge kann sich entspannt auf große Entfernung einstellen.

Die Vergrößerung einer Lupe ergibt sich aus dem Verhältnis des Sehwinkels mit und ohne Sehhilfe. Als Bezugsgröße wird meist die deutliche Sehweite $s_0 = 25\text{cm}$ gewählt, die mittlere Entfernung, ab der ein menschliches Auge einen Gegenstand scharf abbilden kann. Für ein Bild im Unendlichen ist der Öffnungswinkel

$$\varepsilon = \frac{G}{f},$$

betrachtet man den Gegenstand ohne Linse aus der Entfernung $s_0 = 25\text{cm}$, so ist der Öffnungswinkel

$$\varepsilon_0 = \frac{G}{s_0}.$$

Die Vergrößerung der Lupe ist das Verhältnis der beiden Winkel

$$V = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{s_0}{f}. \tag{12}$$

2.4.3 Linsensysteme

Auch für Systeme von Linsen kann die Bildweite und die Vergrößerung mit Hilfe der Abbildungsgleichung berechnet werden. Beispielsweise lässt für jede der Sammellinsen in Abb. 11 die Bildweite bei bekannter Brennweite aus der Gegenstandsweite berechnen.

Beispiel: System zweier Sammellinsen

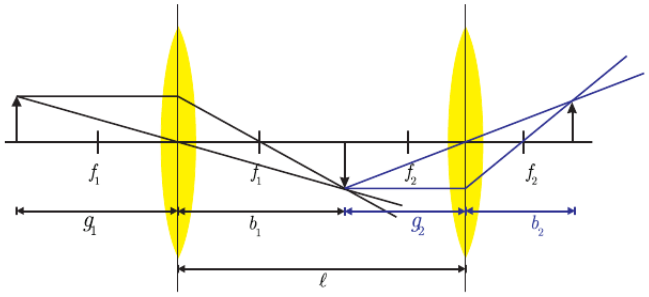

Abbildung 11: System zweier konvexer Linsen

Wir nehmen zwei Sammellinsen an: Linse 1 besitzt die Brennweite f_1 = 5cm, sie befindet sich an der Stelle $x1$ = 10cm. Linse 2 auf der rechten Seite besitzt die Brennweite f_2 = 10cm und befindet sich bei x_2 = 20cm. Die Abbildungsgleichung (11) lautet

$$b = \frac{f \cdot g}{g - f},$$

befindet sich ein Gegenstand bei x_g = -6cm, so ist die Gegenstandsweite vor der ersten Linse g = 6cm:

$$b_1 = \frac{5\text{cm} \cdot 6\text{cm}}{(6-5)\text{cm}} = 30\text{cm}$$

Die Abbildung befindet sich 30cm hinter der ersten Linse. Die zweite Linse befindet sich bei x_2=20cm, das Bild der ersten Linse also ebenfalls auf der rechten Seite der zweiten Linse. Die Gegenstandsweite der rechten Linse ist die Differenz zwischen Bildweite b_1 und Position der Linse x_2, also g_2 = -10cm. Die Bildweite erhalten wir wieder durch die Abbildungsgleichung:

$$b_2 = \frac{f_2 g_2}{g_2 - f_2} = \frac{10\text{cm}(-10\text{cm})}{-10\text{cm} - 10\text{cm}} = 5\text{cm}.$$

Es ergibt sich ein scharfes und aufrechtes Bild bei der Bildweite b_2 = 5cm, gemessen ab der zweiten Linse, also an der Position $x_B = 25$cm. Die Vergrößerung ist das Produkt der Einzelvergrößerungen

$$V = V_1 \cdot V_2 = \frac{f_1}{g_1 - f_1} \cdot \frac{g_2}{f_2 - g_2} = \frac{5 \cdot 10}{(6-5)(-10-(10))} = -\frac{5}{2}$$

2.5 Anwendungen

2.5.1 Mikroskop

Ein Objekt (Gegenstand) in sehr geringem Abstand vom Brennpunkt einer Sammellinse (dem Objektiv) liefert ein stark vergrößertes Bild hinter der Linse.

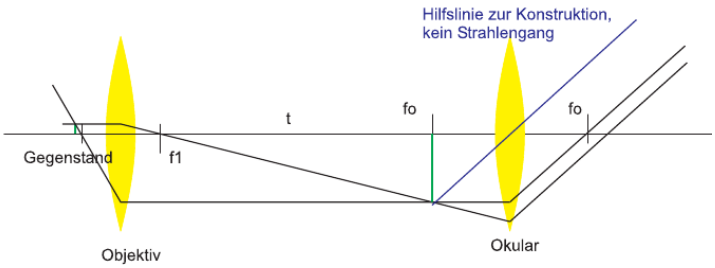

Abbildung 12: Strahlengang im Mikroskop

Dieses Zwischenbild entsteht im Abstand t (der Tubuslänge) vom inneren Brennpunkt des Objektivs. Da sich der Gegenstand sehr nah an vor dem Brennpunkt befindet, kann die Gegenstandsweite in guter Näherung durch die Brennweit der Linse ersetzt werden. Ist die Tubuslänge groß gegenüber der Brennweite, so kann die Bildweite durch die Tubuslänge genähert werden. Für die Vergrößerung des Objektivs ergibt sich

$$V_{obj} = \frac{f}{g-f} \approx \frac{t}{f}$$

Das Zwischenbild kann nun durch eine zweite Linse (das Okular) mit Brennweite f_0 wie durch eine Lupe betrachtet werden. Dazu befindet sich das Zwischenbild praktisch in der Brennebene des Okulars, man betrachtet ein nochmals vergrößertes virtuelles Bild des Zwischenbilds. Der Abbildungsmaßstab des Okulars ist nach (12)

$$V_{ok} = \frac{s_0}{f_o}.$$

Für die Vergrößerung des Mikroskops ergibt sich also

$$V = V_{obj} V_{ok} = \frac{t s_0}{f f_o} \tag{13}$$

2.5.2 Das Fernrohr

Eine Sammellinse erzeugt von weit entfernten Gegenständen (das Licht fällt angenähert in einem parallelen Strahlenbündel ein) ein Bild, das sich praktisch in der Brennebene befindet. Aus der Definition der Vergrößerung

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{f_1}{g}$$

erkennt man, dass das Bild umso größer ist, je größer die Brennweite f_1 der Sammellinse (die wir wieder als Objektiv bezeichnen) ist.

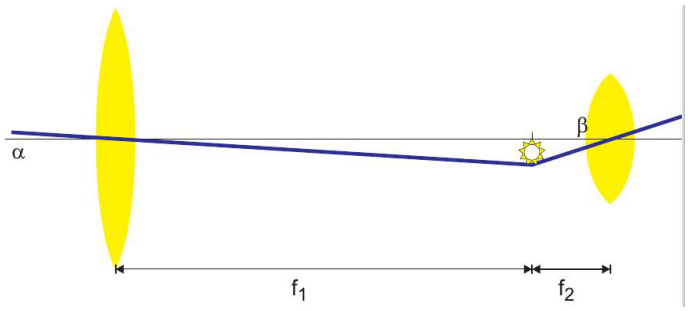

Abbildung 13: Fernrohr nach Kepler

Der Öffnungswinkel in der Brennebene ist $\varepsilon = B/s_0$, wenn das Bild mit dem Auge im Abstand s_0 (von der Brennebene) betrachtet wird. Ohne die Linse sähe man das Bild an derselben Stelle unter dem Öffnungswinkel $\varepsilon_0 = G/g$. Die Vergrößerung des Systems ist das Verhältnis der beiden Winkel,

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{B}{s_0}\frac{g}{G} = \frac{gf_1}{s_0 g} = \frac{f_1}{s_0}.$$

Für eine Brennweite $f > s_0$ vergrößert das Objektiv also die Abbildung im Auge. Im Fernrohr wird das Bild in der Brennebene des Objektivs (Zwischenbild) mit einem Okular der Brennweite f_2 als Lupe nochmals um den Faktor

$$V_L = \frac{s_0}{f_2}$$

vergrößert. Insgesamt hat unser Fernrohr also eine Vergrößerung von

$$V_{ges} = \frac{f_1}{s_0}\frac{s_0}{f_2} = \frac{f_1}{f_2}.$$

Das behandelte Fernrohr (Keplersches Fernrohr) eignet sich für astronomische Beobachtungen, es liefert aber ein umgekehrtes Bild und eignet sich deshalb nicht für den irdischen Gebrauch. Das Bild lässt sich aber ein weiteres Mal umkehren, indem speziell geformte Prismen (z.B. im Opernglas) oder eine Zerstreuungslinse statt der Sammellinse als Okular benutzt werden (Galilei- Fernrohr). Moderne Teleskope für die Astronomie sind meist als Newton-Teleskope mit einem sphärischen Spiegel anstatt der Linse als Objektiv ausgeführt. Die Spiegel sind speziell bei großen Teleskopen stabiler und zeigen weniger Abbildungsfehler.

2.6 Interferenz, Wellenoptik

Licht äußert sich oft in Form einer elektromagnetischen Welle, bei der ein elektrischer und ein magnetischer Feldvektor mit einer Phasenverschiebung

von 90° (bzw. $\pi/2$) eine Sinusschwingung vollführen. Die Welle erhält sich selbst, sie benötigt kein Medium und kann damit Energie selbst durch den leeren Raum transportieren. Eine Lichtquelle (Strahlungsquelle) erzeugt meist aber keine zusammenhängende Welle, sondern einzelne, kurze Wellenzüge, die sich Überlagern. Je nach Phasenbeziehung der einzelnen Wellenzüge zueinander können sich diese Teilwellen durch vektorielle Addition ihrer Auslenkungen verstärken oder auch auslöschen. Man spricht von Interferenz der Wellenzüge, sie tritt bei allen Arten von Wellen auf.

Schwächen sich die Wellen dabei gegenseitig ab, so spricht man von destruktiver Interferenz, verstärken sich die Amplituden, so spricht man von konstruktiver Interferenz.

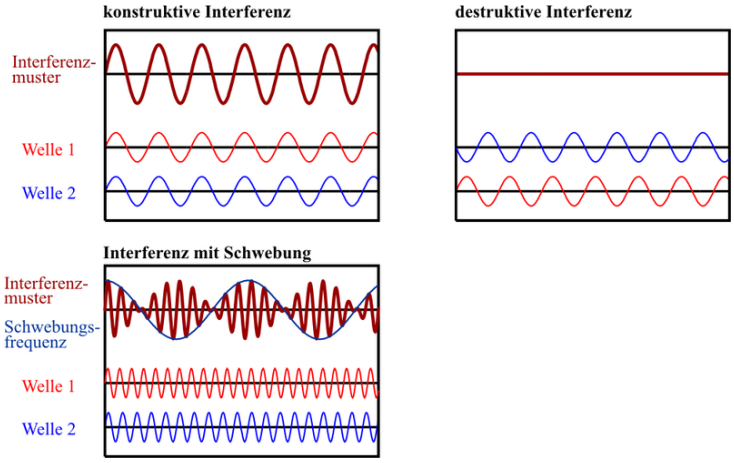

Abbildung 14: Interferenz zweier sinusförmiger Wellen: vollständig konstruktive und vollständig destruktive Interferenz bei Schwingungen gleicher Wellenlänge und gleicher Amplitude. Das dritte Bild verdeutlicht das Entstehen einer Schwebung bei Wellen unterschiedlicher Frequenz.

Schwingen zwei Wellen mit gleicher Frequenz und Amplitude, aber gegeneinander um eine halbe Wellenlänge verschoben, so kommt es zur vollständigen Auslöschung der Wellen. In der Realität werden die Wellen meist unterschiedliche Frequenzen und Phasenverschiebungen aufweisen, was häufig zu einer Abschwächung der Welle führt. Die Interferenzmuster auf einer DVD oder einem Ölfleck auf einer nassen Fahrbahn entstehen beispielsweise durch Interferenz des Lichts, dass an der Oberfläche reflektiert wird mit Licht von der Unterseite - je nach Wellenlänge und Winkel des refletierten Lichts werden einzelne Wellenlängenbereiche nach der Reflexion abgeschwächt. Man beobachtet unter verschiedenen Winkeln also den Rest des Spektrums farbig.

Interferenz wird beispielsweise bei der Vergütung von Brillen oder Glaslinsen eingesetzt (Entspiegelung). Man kann die reflektierte Intensität verringern, indem eine dünne, transparente Schicht eines brechenden Materials auf die Oberfläche einer Linse aufgebracht wird. Das Prinzip ist in Abb. 15 dargestellt:

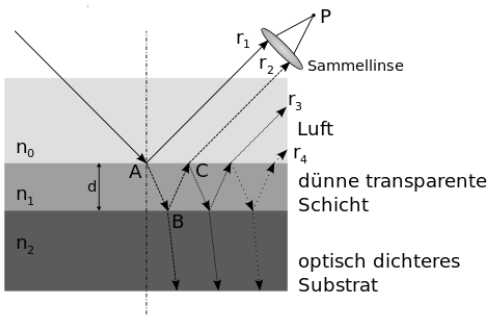

Abbildung 15: Zur Entspiegelung einer Oberfläche: der einfallende Strahl wird an A und an B mit Phasensprung reflektiert. Die Strahlen r_1 und r_2 interferieren anschließend destruktiv zur Amplitude null

Ein einfallender Strahl wird an der Oberfläche (in Punkt A) und an der Grenzfläche (Punkt B) teilweise reflektiert (bei beiden Reflexionen springt die Phase der Welle um π - wir können diesen Sprung außer Acht lassen). Betrachtet man eine einzelne Wellenlänge λ_0, so wird sich die vollständige destruktive Interferenz einstellen, wenn der Gangunterschied der beiden reflektierten Strahlen ein ungerades Vielfaches von $\lambda_0/2$ beträgt (die Phasendifferenz ist dann π) und die Amplituden gleich sind. Die Amplituden der reflektierten Strahlen lassen sich mit Hilfe der Fresnel-Gleichungen, die wir hier nicht behandeln können berechnen, für den optimalen Brechungsindex der Vergütungsschicht ergibt sich daraus die Bedingung

$$n_1 = \sqrt{n_0 \cdot n_2}$$

(n_0 wird meist 1 gesetzt, da das Licht aus Luft auf die Oberfläche trifft) für den gleichen Betrag der Amplituden. Mehrfachreflexion, die dadurch entsteht, dass ein Teil des Strahls nicht an der Oberfläche der Schicht austritt, sondern wieder nach unten reflektiert wird und den Weg ein weiteres Mal durchläuft, wird dabei vernachlässigt. Für den benötigten Phasenunterschied von π muss die optische Weglänge des Strahls in der Vergütungsschicht jetzt

$$k\frac{\lambda_0}{2} \quad \text{mit} \quad k = 1, 3, 5, \ldots$$

betragen. Verwendet man die dünnste mögliche Schicht (d.h. $k = 1$), so wird die Weglänge

$$2dn_1 = k\frac{\lambda_0}{2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\lambda_0}{4n_1}.$$

Die benötigte Schichtdicke der Vergütungsschicht beträgt also d. Die destruktive Interferenz ist natürlich nur für die eine Wellenlänge λ_0 und senkrechten Einfall vollständig, abweichende Wellenlängen werden zunehmend reflektiert (interferieren nicht vollständig destruktiv), für abweichende Winkel gilt dasselbe. Brillenträger können dies meist einfach überprüfen - die (schwache) Reflexion an vergüteten Oberflächen ist farbig, die Farbe winkelabhängig.

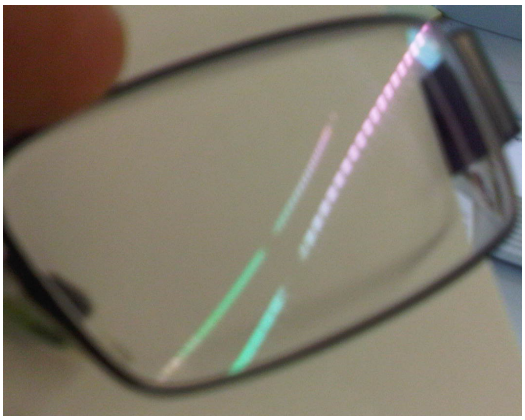

Abbildung 16: Reflexion am entspiegelten Brillenglas eines Dozenten. Die Abhängigkeit der Farbe des Reflexes vom Winkel ist gut zu erkennen

2.7 Beugung

Die Beugung oder Diffraktion ist die Ablenkung von Wellen an einem Hindernis. Durch Beugung kann sich eine Welle in Raumbereiche ausbreiten, die auf geradem Weg durch das Hindernis versperrt wären. Jede Art von Wellen zeigt Beugung, man erkennt sie besonders deutlich bei Wasserwellen oder Schall. Bei Licht ist die Beugung ein Faktor, der das Auflösungsvermögen von Kamera-Objektiven und Teleskopen begrenzt. Es gibt aber auch technische Komponenten, wie Beugungsgitter, die die Beugung gezielt ausnutzen.

Zur Beugung kommt es durch Entstehung von Elementarwellen entlang einer Wellenfront nach dem huygens-fresnelschen Prinzip. Diese können durch Überlagerung zu Interferenzerscheinungen führen. Betrachtet man die beiden

Strahlen, die von den Rändern eines Einfachspalts, in eine bestimmte Richtung abgelenkt werden, so können sich diese beiden Anteile des Lichtbündels nach einer Wegstrecke hinter dem Spalt konstruktiv oder destruktiv überlagern. hinter dem Spalt ergibt sich so eine Reihe von Beugungsminima.

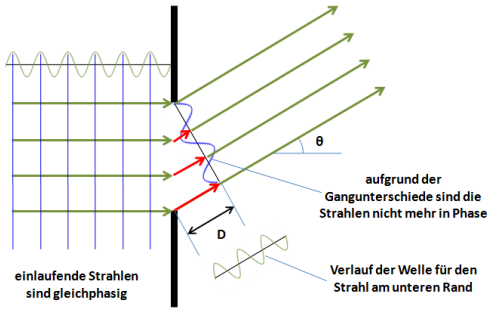

Abbildung 17: Beugung am Einzelspalt: die roten Pfeile verdeutlichen den Gangunterschied einzelner Strahlen gegenüber dem oberen Strahl. Die blaue Sinuskurve im Strahlengang symbolisiert die Feldstärke der einzelnen Strahlen entlang der Linie zur selben Zeit. Destruktive Interferenz besteht für die Richtungen, für die sich ganze Perioden ergeben.

Betrachtet man am Einzelspalt die in Richtung Θ auslaufenden Strahlen, so haben diese gegeneinander einen Gangunterschied. Das Interferenzmuster ergibt sich dadurch, dass sich die einzelnen Strahlen in einem entfernten Punkt (der Wand) überlagern. Beträgt der Gangunterschied zwischen dem Strahl am oberen Ende und dem am unteren Ende des Spalts D , so kommt es immer dann zu einer Auslöschung der in dieser Richtung gemessenen Gesamtintensität, wenn D ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge größer Null ist. In diesem Fall heben sich die positiven und die negativen Feldstärken zwichen den Randstrahlen genau auf. Für alle anderen Richtungen verbleibt eine Restintensität, für den geraden Durchgang ($k = 0$) tritt ein besonders helles Intensitätsmaximum auf, da dort alle Strahlen gleichphasig sind und konstruktiv interferieren

2.7.1 Bragg-Beugung

Trifft eine elektromagnetische Welle auf ein regelmäßiges dreidimensionales Gitter, wir das einfallende Strahlenbündel am an diesem Gitter gebeugt. Der

konstante Abstand einzelner Netzebenen von Punkten im Gitter verstärkt Interferenzeffekte, so dass man bei einer festgelegten Wellenlänge scharfe Intensitätsmaxima erhält, wenn die reflektierten Wellen sich konstruktiv überlagern.

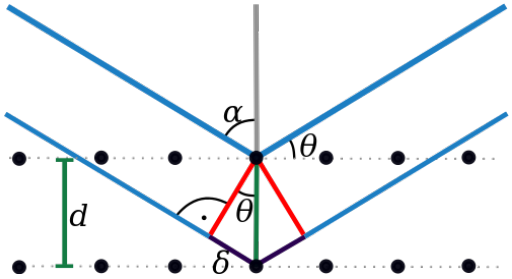

Abbildung 18: Prinzip der Bragg-Beugung an einem regelmäßigen Gitter von Punkten

Die blauen Linien in Abb. 18 entsprechen Strahlen, die auf parallele Ebenen des Beugungsgitters treffen und dabei mit dem Lot den Winkel α einschließen. Der Komplementärwinkel $\Theta = 90° - \alpha$ heißt Braggwinkel, d ist der Abstand der Gitterebenen.

Bei einer hohen Zahl von beugenden Punkten im Gitter gibt es für den Fall nicht ausschließlich konstruktiver Interferenz statistisch zu jeder Welle immer eine zweite, sie genau auslöscht, so dass keine Reflexion mehr beobachtet wird. Dies ist auch bei einem nicht gleichmäßigen Gitter der Fall.

Konstruktive Interferenz tritt auf, wenn die Wegdifferenz zwischen oberem und unterem Wellenzug (der Gangunterschied 2δ) einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge λ entspricht:

$$2\delta = n \cdot \lambda,$$

wobei n auch als Beugungsordnung bezeichnet wird. Der Gangunterschied in der Abbildung beträgt

$$\delta = d \sin(\Theta),$$

durch Einsetzen erhält man sofort die Bragg-Gleichung

$$n \cdot \lambda = 2d \sin(\Theta) \tag{14}$$

Beugt man eine Röntgenwelle an einem Kristallgitter (genauer: an den Atomen im Gitter), so erhält man Information über die Qualität des Gitters (und

damit die Güte des Materials) über die Form der einzelnen Reflexe und über die Zusammensetzung des Gitters, da der Braggwinkel vom Abstand der Ebenen im Kristall bestimmt wird.

Das Verfahren wird als Röntgendiffraktometrie (engl. X-Ray Diffraction, XRD) bezeichnet. Es erlaubt eine zerstörungsfreie Prüfung von Werkstoffen durch Bestrahlung mit Röntgenwellen scharfer Frequenz und Vermessen der Reflexe unter verschiedenen Winkeln.