Aufgabe 1

(10 Punkte)
Mit der Kettenregel abgeleitet

$$\begin{aligned} f(x+ct) &= (x+ct)^4 \\ f'(x+ct) &= 4(x+ct)^3 \\ f''(x+ct) &= 4\cdot 3(x+ct)^2 = 12(x+ct)^2 \\ \dot{f}(x+ct) &= 4(x+ct)^3 \cdot c \\ \ddot{f}(x+ct) &= 4\cdot 3\cdot c\cdot c\cdot (x+ct)^2 = c^2 12(x+ct)^2 \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL:

$$\frac{\partial^2}{dx^2}f(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t) = 12(x+ct)^2 - \frac{c^2}{c^2}12(x+ct)^2 = 0.$$

Die Funktion ist eine Lösung. Natürlich ist auch $(x-ct)^4$ eine Lösung, weil $(-c)\cdot(-c) = +c^2$. $(x-ct)^3$ ist ebenfalls Lösung - die beiden Ableitungen verhalten sich analog:

$$\begin{aligned} f(x+ct) &= (x+ct)^3 \\ f'(x+ct) &= 3(x+ct)^2 \cdot 1 \\ f''(x+ct) &= 3\cdot 2\cdot (x+ct)\cdot 1 = 6(x+ct) \\ \dot{f}(x+ct) &= 3(x+ct)^2 \cdot c \\ \ddot{f}(x+ct) &= 3\cdot 2\cdot c\cdot c(x+ct) = 6(x+ct)c^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(10 Punkte)

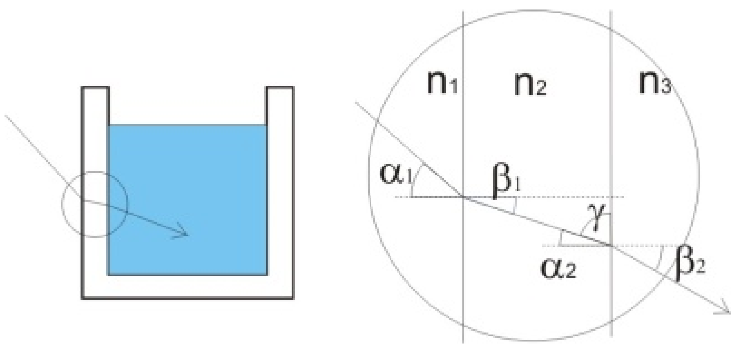

Abbildung 1: Lichtbündel und Glaswanne.

a) Brechung an der Außenseite der Glaswanne:

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\beta_1)} = \frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \beta_1 = 35,3^\circ$$

Der Einfallswinkel für die zweite Brechung beim Übergang von Glas in Wasser entspricht β_2 (Wechselwinkel): $\alpha_2 = \beta_1$

$$\frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\beta_2)} = \frac{n_3}{n_2} \quad \Rightarrow \beta_2 = 40,6^\circ$$

b) Allgemeine Lösung: es gilt $\alpha_2 = \beta_1$ mit

$$\sin(\beta_2) = \frac{n_2}{n_3}\sin(\alpha_2) = \frac{n_2}{n_3}\sin(\beta_1),$$

Zusätzlich für die erste Brechung

$$\sin(\beta_1) = \frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha_1)$$

Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, so folgt

$$\sin(\beta_2) = \frac{n_2}{n_3}\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha_1) = \frac{n_1}{n_3}\sin(\alpha_1)$$

Der Brechungsindex n_2 der Glaswand verschwindet, die Richtung entspricht damit einem Übergang aus Luft direkt in Wasser.

Aufgabe 3

(22 Punkte)

a) Für die Bildweite b benötigt man die Brennweite, es ist $D = 1/f = 20\,\mathrm{dpt}$ und damit $f = 1/D = 5\,\mathrm{cm}$. Aus der Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{g-f}{fg}$$
$$b = \frac{fg}{g-f} = \frac{5\,\mathrm{cm}\cdot 15\,\mathrm{cm}}{15\,\mathrm{cm} - 5\,\mathrm{cm}} = 7,5\,\mathrm{cm}$$

Die Vergrößerung der Abbildung ist (das Minuszeichen zeigt an, dass das Bild auf dem Kopf steht)

$$V_1 = (-1)\frac{b}{g} = -\frac{7,5\,\mathrm{cm}}{15\,\mathrm{cm}} = -\frac{1}{2}.$$

b) Das Bild der ersten Abbildung entsteht genau zwischen den beiden Linsen, also $g_2 = 7,5\,\mathrm{cm}$ vor der zweiten Linse. Mit der Abbildungsgleichung liefert die zweite Linse eine Abbildung bei

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{b_2} + \frac{1}{g_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{g_2} = \frac{g_2 - f_2}{f_2 g_2}$$
$$b_2 = \frac{f_2 g_2}{g_2 - f_2} = \frac{6\,\mathrm{cm} \cdot 7,5\,\mathrm{cm}}{7,5\,\mathrm{cm} - 6\,\mathrm{cm}} = 30\,\mathrm{cm}$$

Das Bild des Systems entsteht $b_2 = 30\,\mathrm{cm}$ hinter der zweiten Linse. Die Vergrößerung ist

$$V_2 = (-1)\frac{b_2}{g_2} = -\frac{30\,\mathrm{cm}}{7,5\,\mathrm{cm}} = -4.$$

Die Vergrößerung des Systems ist $V_1 \cdot V_2 = (-1/2) \cdot 4 = 2$.

c) das Bild steht aufrecht, es ist reell (beide Abbildungen lassen sich durch tatsächliche Lichtstrahlen konstruieren und liefern ein reelles Bild, die Vergrößerung ist positiv)

d) Konstruktion der Abbildung:

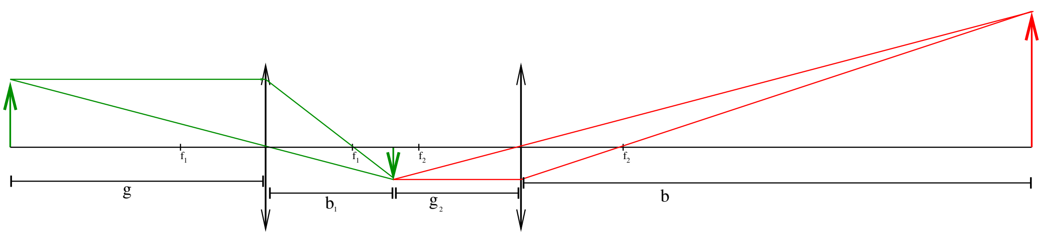

Abbildung 2: Abbildung durch das Linsensystem.

e) Das Linsensystem kann nicht durch eine Linse ersetzt werden (eine Linse liefert ein reelles Bild, das auf dem Kopf steht oder ein aufrechtes virtuelles Bild!).

f) Wenn das Bild auf dem Kopf stehen darf, kann die Abbildung mit einer Linse erzeugt werden. Gegenstand und Bild sind genau $60\,\mathrm{cm}$ voneinander entfernt, die Abbildung hat eine Gesamtvergrößerung von $V = -2$, also gilt

$$\frac{b}{g} = 2 \quad \Rightarrow b = 2 \cdot g \quad \text{oder } g_3 = 20\,\mathrm{cm}, b_3 = 40\,\mathrm{cm}$$

Damit kann die benötigte Brennweite berechnet werden:

$$\frac{1}{f_3} = \frac{1}{g_3} + \frac{1}{b_3} = \frac{1}{20\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{40\,\mathrm{cm}}$$
$$\Rightarrow f_3 = 13,\bar{3}\,\mathrm{cm}$$

Aufgabe 4

(9 Punkte)
Der Lichtstrahl wird exakt in die Einfallsrichtung reflektiert.

a) Konstruktion des Strahlengangs:

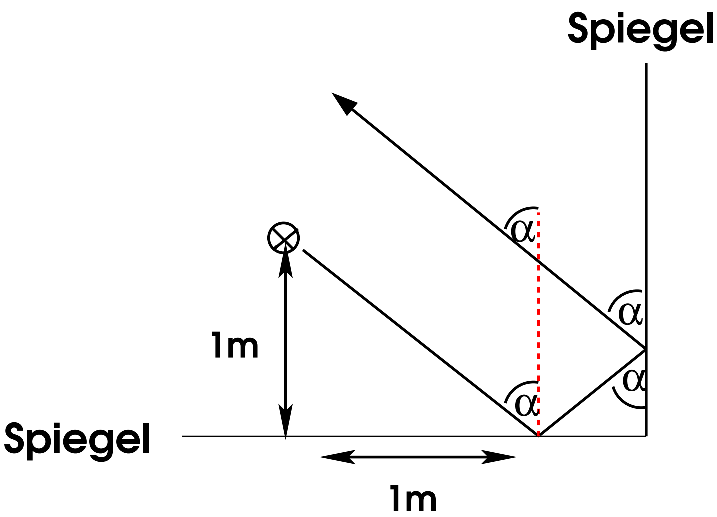

Abbildung 3: Spiegelsystem.

b) Bei Reflexion gilt, dass der Ausfallswinkel gleich dem Einfallswinkel ist. Die eingezeichneten Winkel sind Wechselwinkel bzw. Stufenwinkel und daher immer gleich - auch für einen beliebigen Einfallswinkel. Der reflektierte Strahl läuft dem einfallenden Strahl immer genau entgegen.

c) senkrecht aufeinanderstehende Spiegel (in drei Dimensionen) werden in Reflektoren (Rückstrahler an Fahrrädern etc.) verwendet. Eine der Apollo-Missionen der NASA hat in den 1970er-Jahren ein solches Spiegelsystem auf der Mondoberfläche installiert, mit dem heute noch regelmäßig der Abstand des Mondes vermessen wird.

Aufgabe 5

(3 Punkte)
Am dem Snelliusschen Brechungsgesetz kann man die beiden Fälle direkt ablesen:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad \sin(\beta) = \sin(\alpha)\frac{n_1}{n_2}$$

Für gleiche Ein- und Ausfallswinkel gilt also

$$\sin(\beta) = \sin(\alpha)\frac{n_1}{n_2} = \sin(\alpha)$$

Die beiden möglichen Fälle sind

1. senkrechter Einfall $\sin(\alpha) = \sin(\beta) = 0$ oder
2. identische Brechungsindizes $n_1 = n_2 \ \Rightarrow n_1/n_2 = 1$