Musterlösung zur Klausur Mathematik 1 TMM10

M. Oettinger 30.3.2011

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(14 Punkte):

(a) Betragsfreie Form:

$$f(x) == x \cdot e^{-|x|} = \begin{cases} x \cdot e^- x & \text{für} x \geq 0 \\ x \cdot e^x & \text{für} x < 0 \end{cases}$$

Symmetrie: $f(-x) = (-x) \cdot e^{-|-x|} = (-x) \cdot e^{-|x|} = -f(x)$. Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung bzw. ungerade.

(b) Stetigkeit in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} x \cdot e^- x = 0$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} x \cdot e^x = 0$$

$\Rightarrow$ die Funktion $f(x)$ ist in $x_0 = 0$ stetig.

(c) Grenzwert für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x \cdot e^- x = 0+$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x \cdot e^x = 0-$$

(d)

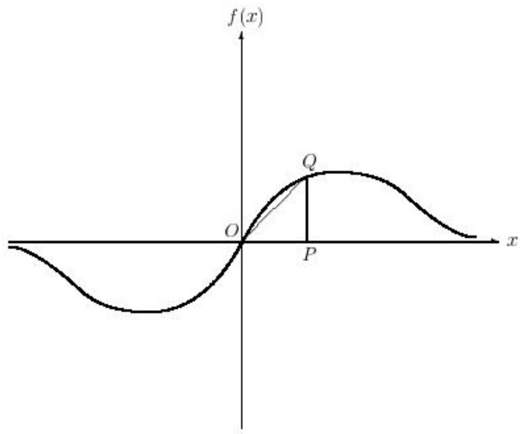
$$w := f \underbrace{\left(\frac{1,4-2,6}{2}\right)}_{\text{Intervallmittelpunkt} = -0,6} = -1,093 < 0, \text{ also Nullstelle in } [-0,6;1,4]$$

$$w := f \underbrace{\left(\frac{1,4-0,6}{2}\right)}_{\text{Intervallmittelpunkt} = 0,4} = 0,597 > 0, \text{ also Nullstelle in } [-0,6;0,4]$$

$$w := f \underbrace{\left(\frac{0,4-0,6}{2}\right)}_{\text{Intervallmittelpunkt} = -0,1} = -0,111 < 0, \text{ also Nullstelle in } [-0,1;0,4]$$

$$w := f \underbrace{\left(\frac{0,4-0,1}{2}\right)}_{\text{Intervallmittelpunkt} = 0,15} = 0,174 > 0, \text{ also Nullstelle in } [-0,1;0,15]$$

(e) Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

(13 Punkte):
Gegeben sind die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Die Gerade liegt parallel zur Ebene, wenn der Richtungsvektor der Geraden orthogonal zum Normalenvektor der Ebene ist und der Aufpunkt der Geraden nicht in der Ebene liegt:
Normalenvektor der Ebene:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4-a \\ -16-a \end{pmatrix}$$

Orthogonalität zwischen Richtungsvektor von g und Normalenvektor fordert

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4-a \\ -16-a \end{pmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow -5 - 8 + 2a + 16 + a = 0$$
$$\Rightarrow a = -1$$

Der Aufpunkt liegt in der Ebene, wenn

$$\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$b = -s + 4t \qquad (1)$$
$$1 = -4 + 4s - t \qquad \Rightarrow 5 = 4s - t \qquad (2)$$
$$3 = 2 + s + t \qquad \Rightarrow s = 1 - t \qquad (3)$$

Einsetzen von (3) in (2) liefert $t = -1/5$, in (3) folgt $s = 6/5$. Damit ergibt sich mit (1) $b = -2$. Die Gerade liegt also parallel zur Ebene, wenn $a = -1$ und $b \neq -2$.

(b) Die Gerade liegt parallel zur Ebene, wenn der Richtungsvektor der Geraden orthogonal zum Normalenvektor der Ebene ist und der Aufpunkt der Geraden in der Ebene liegt. Mit der Lösung aus Teil (a) ergibt sich sofort $a = -1$ und $b = -2$.

(c) Die Gerade schneidet die Ebene, wenn sie nicht in der Ebene und nicht parallel zur Ebene liegt (Richtungsvektor nicht senkrecht zum Normalenvektor). Mit der Lösung aus Teil (a) folgt sofort $a \neq -1$.

Aufgabe 3

(4 Punkte):
Es ist offensichtlich

$$\frac{(\sqrt{k}+1)^2}{k^2+\sqrt{k^4-1}} \geq \frac{(\sqrt{k})^2}{k^2+\sqrt{k^4}} = \frac{k}{k^2+k^2} = \frac{1}{k}.$$

Weil $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, divergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k}+1)^2}{k^2+\sqrt{k^4-1}}$

Aufgabe 4

(6 Punkte):

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to 0+} (\sin(x))^{2x} &= \lim_{n\to 0+} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right)^{2x} \\
&= \lim_{n\to 0+} \underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \cdot \underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...\right)^{2x}}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to 0+} (\sin(x))^{2x} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

(6 Punkte):

(a) f und g lassen sich jeweils als Summe von u und v darstellen:

$$f = \frac{1}{2}(u+v), \qquad g = \frac{1}{2}(u-v).$$

Die Summe zweier stetiger Funktionen ist immer stetig.

(b) Wir wählen eine unstetige Funktion, beispielsweise $f = \frac{1}{x}$ und $g(x) = -f(x)$. Dann ist die Summe der beiden Funktionen

$$u = f + g = 0$$

stetig, die einzelnen Funktionen aber nicht.

Aufgabe 6

(5 Punkte):

$$
\begin{aligned}
\sin(i) &= i - \frac{i^3}{3!} + \frac{i^5}{5!} - \frac{i^7}{7!} + ... \\
&= i\left(1 + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^7}{7!} + ...\right) \quad = i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \cdot 1^{2k+1} = i \cdot \sinh(1)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7

(7 Punkte):

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k = \frac{3}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right].$$

i)

Wähle $n_0 = 1 \Rightarrow 3 = \frac{3}{4}\left[3 \cdot (2-1) + 1\right] = 3$

ii)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 3^k \cdot k &= \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k + 3^{n+1}(n+1) \\
&= \frac{3}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right] + 3^{n+1}(n+1) \\
&= \frac{3}{4}\left[3^n(2n-1)+1+\frac{4}{3}\cdot 3^{n+1}(n+1)\right] \\
&= \frac{3}{4}\left[3^n(2n-1)+1+4\cdot 3^n(n+1))\right] \\
&= \frac{3}{4}\left[3^n(2n-1+4n+4)+1)\right] \\
&= \frac{3}{4}\left[3^n(6n+3)+1)\right] \\
&= \frac{3}{4}\left[3^{n+1}(2n+1)+1)\right] \\
&= \frac{3}{4}\left[3^{n+1}(2n+2-1)+1)\right] \\
&= \frac{3}{4}\left[3^{n+1}(2(n+1)-1)+1)\right]
\end{aligned}
$$