Musterlösung zur Übungsklausur Statistik

WMS13A

Oettinger 6/2014

Aufgabe 1

(a) Falsch: der Modus ist die am häufigsten auftretende Merkmalsausprägung in einer Stichprobe.

(b) Richtig: ein ordinales Merkmal besitzt eine natürliche Rangfolge, ein nominales Merkmal keine.

(c) Richtig: es handelt sich um eine Summe quadrierter Größen.

(d) Falsch: der Modus ist die am häufigsten auftretende Merkmalsausprägung in einer Stichprobe.

(e) Ein Merkmal ist entweder metrisch oder stetig, d.h. es gibt kein Merkmal, das gleichzeitig metrisch und stetig ist - falsch.

(f) Die statistischen Einheiten einer Bewegungsmasse besitzen die Lebensdauer Null - falsch.

Aufgabe 2

Die Tabelle in Form relativer Häufigkeiten:

X (PKW) Verbrauch Y	1	2	3	4	$\sum$
6,1	0,182	0,2	0,182	0,194	0,185
6,2	0,545	0,6	0,545	0,516	0,546
6,3	0,273	0,2	0,273	0,290	0,269
$\sum$	1	1	1	1	1

(a) Die Spalten der Tabelle relativer Häufigkeiten unterscheiden sich $\Longrightarrow$ die Größen X und Y sind nicht stochastisch unabhängig.

(b) Die bedingte Verteilung $f(x_i|Y = 6,2)$ ist die Zeile mit $Y = 6,2$, also $f(x_i|Y = 6,2) = \{6; 12; 90; 9\}$.

(c) Benötigt wird der Mittelwert des Verbrauchs für PKW 2 (alle Angaben in l):

$$\bar{y}(X = 2) = \frac{1}{20}(4 \cdot 6,1 + 12 \cdot 6,2 + 4 \cdot 6,3) = 6,2.$$

Die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert, also

$$s^2(Y|X = 2) = \frac{1}{20}\left(4 \cdot (6,1 - 6,2)^2 + 12 \cdot (6,2 - 6,2) + 4 \cdot (6,3 - 6,2)\right)$$
$$= \frac{1}{20} 8 \cdot 0,1^2 = 4 \cdot 10^{-3}.$$

Aufgabe 3

a) Die benötigten Daten:

Einkommen in Talern	Klassenbreite in Tausend Talern	Häufigkeit	relativ	kumuliert	Dichte
]0-500]	0,5	9	0,09	0,09	18
]500-1000]	0,5	13	0,13	0,22	26
]1000-1500]	0,5	32	0,32	0,54	64
]1500-2000]	0,5	41	0,41	0,95	82
]2000-3000]	1,0	3	0,03	0,98	3
]3000-5000]	2,0	2	0,02	1,0	1

Histogramm der Einkommen:

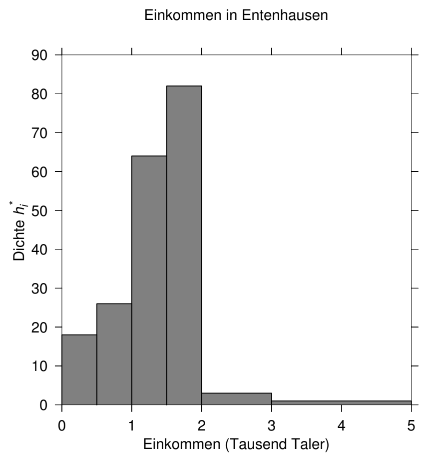

Abbildung 1: Einkommensverteilung in Entenhausen

b) arithmetisches Mittel (in Tausend Taler):

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(0,25 \cdot 9 + 0,75 \cdot 13 + 1,25 \cdot 32 + 2,5 \cdot 3 + 4,0 \cdot 2) = \frac{139,25}{100} = 1,39$$

50% der befragten Personen werden in der 3.Klasse erreicht, der Median (in Tausend Taler) ist

$$F(\bar{x}_Z) = x_3^u + (x_3^o - x_3^u)\frac{F(\bar{x}_Z) - F(x_3^u)}{F(x_3^o) - F(x_3^u)} = x_3^u + (x_3^o - x_3^u)\frac{F(0,5) - F(x_3^u)}{F(x_3^o) - F(x_3^u)}$$

$$1 + (1,5 - 1) \cdot \frac{0,5 - 0,22}{0,54 - 0,22} = 1,44.$$

Der Median ist etwas größer - die Verteilung scheint leicht rechtssteil.

c) Für die Lorenzkurve wird das gesamte Einkommen benötigt (in Tausend Talern):

$$g_{ges} = 0,25 \cdot 9 + 0,75 \cdot 13 + 1,25 \cdot 32 + +2,5 \cdot 3 + 4,0 \cdot 2 = 139,25$$

Jetzt kann der Anteil der Personen in jeder Klasse am Gesamteinkommen berechnet werden:

$$q_k = f_k \cdot (x_k^o + x_k^u)/2.$$

Einkommen in Talern	relative Häufigkeit f_k	kumuliert F_k	Anteil q_k	kumuliert Q_k
]0-500]	0,09	0,09	0,032	0,032
]500-1000]	0,13	0,22	0,070	0,102
]1000-1500]	0,32	0,54	0,287	0,389
]1500-2000]	0,41	0,95	0,515	0,904
]2000-3000]	0,03	0,98	0,054	0,958
]3000-5000]	0,02	1,0	0,057	1

Lorenz-Plot:

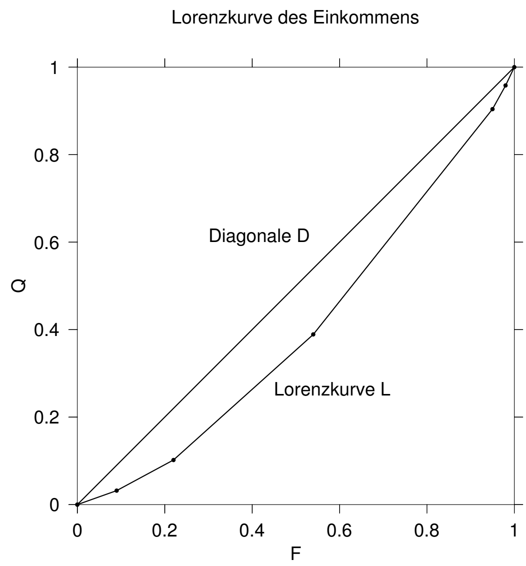

Abbildung 2: Lorenzkurve der Einkommensverteilung in Entenhausen

Der Gini-Koeffizient entspricht der doppelten Fläche zwischen den beiden Kurven. Man erkennt, dass die relative Konzentration (und damit der Gini-Koeffizient) nicht besonders groß ist.

Aufgabe 4

Es handelt sich beim idealen Wüfel um ein Laplace-Experiment mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/6$ für das Auftreten einer bestimmten Augenzahl.

(a) Wahrscheinlichkeit, zweimal hintereinander die zwei zu würfeln: $P = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$.

(b) Für den ersten Würfel sind alle Augenzahlen zulässig, für den zweiten nur die vom ersten Würfel vorgegebene: $P = 1 \cdot 1/6 = 1/6$.

(c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Würfel eine Augensumme zeigen ist 1. Die Wahrscheinlichkeit für unterschiedliche Augenzahlen ist die Wahrscheinlichkeit einer Augensumme minus der Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Würfel dieselbe Augenzahl zeigen, also $P = 1-1/6 = 5/6$.

Aufgabe 5

a) Arithmetisches Mittel:

$$\bar{x} = \frac{15 + 16,5 + 17,5 + 18 + 18 + 20 + 22}{7} = \frac{127}{7} = 18,1429$$

b) (a) Harmonisches Mittel:

$$\bar{x}_H = \frac{7}{\frac{1}{15} + \frac{1}{16{,}5} + \frac{1}{17{,}5} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{22}} = 17,9037$$

(b) Die Durchschnittsgeschwindigkeit erhält man als Quotienten der gesamten zurückgelegten Strecke und der gesamten benötigten Zeit, also

$$\frac{15km + 16,5km + 17,5km + 18km + 18km + 20km + 22km}{7h}$$

Die Anwendung des arithmetischen Mittels ist hier korrekt.

c) Geometrisches Mittel:
$\bar{x}_G = \sqrt[3]{(1 + 0,1) \cdot (1 + 0,15) \cdot (1 - 0,0005)} - 1 = 8,13\%$

d) geometrisches Mittel:

$$\bar{x}_G = \sqrt{2 \cdot 2} - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ oder } 100\%,$$

genau das ist ja die Aussage (verdoppelt sich jede Nacht!).

e)

$$\bar{x}_G = \sqrt{2 \cdot 8} - 1 = 4 - 1 = 3 \text{ oder } 300\%.$$

Aufgabe 6

1. Mittleres Alter der Studierenden der DHBW in Ravensburg: Bestandsmasse.
2. Todesfälle in einer Gemeinde: Bewegungsmasse.
3. Maschinenausfälle in einer Werkstatt: Bewegungsmasse.
4. Die Bevölkerung in Ravensburg zum 1.9.2010: Bestandsmasse.